Korrelative Räume bei gegebener Punktkernfläche.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde

der hohen

Philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

eingereicht

und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht

von

Wolfgang Vogt.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Sonnabend, den 20. Oktober 1906, vorm. 11 Uhr

in der Aula Leopoldina:

Vortrag

„zentrale und windschiefe Raum-Verwandtschaften“

und

Promotion.

Breslau
Buchdruckerei H. Fleischmann
1906.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Kgl. Universität Breslau.

Referent: Prof. Dr. **Sturm.**

Der Fakultät hat zugleich der im 13. Bande des Archivs der Mathematik und Physik erscheinende Aufsatz „Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen," vorgelegen.

Meinen Eltern.

Einleitung.

Die Abhandlungen der Herren:

Sturm, Über die Probleme der Projektivität in Ebene und Raum, Math. Ann. Bde. 1. S. 533, 6. S. 513, 15. S. 407, der Collineation, Math. Ann. Bd. 10. S. 117, der correlativen Bündel, Math. Ann. Bd. 12. S. 254;

Hirst, On the Correlation of two Planes, Proc. of Lond. Math. Soc., 5. S. 40, 8. S. 262, auch Ann. di Mat. 2_6. S. 260, 2_8. S. 287, On the Correlation of two Spaces, Proc. of Lond. Math. Soc. Vol. 21. S. 92;

Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879 §§ 28 bis 32 bilden einen zusammenhängenden Zyklus der geometrischen Literatur. Sie fragen nach den Anzahlen projektiv bezogener Gebilde erster, zweiter und dritter Stufe, welche gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen.

In den Sturm-Schubert'schen Arbeiten sind die Träger der gesuchten Projektivitäten frei in einem Raume höherer Dimension. Die Bedingungen bestehen direkt aus Lagebedingungen für die Träger und aus „konjugierten" Elementen, d. s. solche, welche mit entsprechenden Elementen der gesuchten Projektivität inzident sein sollen. Bei den Hirst'schen Arbeiten sind die Träger der Gebilde fest; Bedingungen sind „konjugierte" Elemente, wobei nun zwei Elemente konjugiert heissen, wenn jedes mit dem entsprechenden des anderen inzidiert.

Der Ort der sich selbst konjugierten Elemente ist in dem ersten Falle das Erzeugnis der projektiven Gebilde, im

anderen, wenn die Gebilde ineinander liegen, der Ort der Koinzidenzelemente, also bei korrelativen Gebilden eine Kernkurve oder Fläche.

Es ergibt sich das Problem, solche Systeme von projektiven Gebilden zu untersuchen, welche dasselbe Erzeugnis, bzw. bei festen ineinander liegenden Trägern dasselbe Kerngebilde haben.

Die vorliegende Arbeit erledigt im ersten Teile diese und daran anschliessende Fragen für einstufige Gebilde, im zweiten behandelt sie das Hauptproblem der korrelativen Räume bei gegebener Punktkernfläche.

Der im 13ten Bande des „Archivs der Mathematik und Physik“ erscheinende Aufsatz mit dem Titel „Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen“ löst die aufgeworfene Frage für die Bündel-Korrelation.

Die Untersuchung wird synthetisch-anschaulich geführt. Zum Schluss wird sie durch Methoden der abzählenden Geometrie abgekürzt.

I. Einstufige Gebilde.

§ 1. Strahlenbüschel, die einen gegebenen Kegelschnitt K^2 erzeugen.

(1.) Zwei projektive Strahlenbüschel mit den Scheiteln O_1, O_2 sollen zwei verschiedenen, aber ineinander liegenden Feldern ε_1, ε_2 angehören. Zwei Punkte A_1, A_2 von ε_1 und ε_2 heissen „*konjugiert*“, wenn sie auf entsprechenden Strahlen der projektiven Strahlenbüschel liegen. Einem beliebigen Punkte $A_1 \equiv A_2'$ sind in ε_2 und ε_1 je die Punkte eines Strahles konjugiert; auf jedem Strahl der Ebene liegt eine Projektivität konjugierter Punkte. Der Ort der Koinzidenzelemente dieser Projektivitäten, also der *Ort der sich selbst konjugierten Punkte, ist der von den Büscheln erzeugte Kegelschnitt* K^2. Auf allen Strahlen durch den Pol von O_1O_2 bezüglich K^2 liegt eine *Involution* von konjugierten Punkten; diesen Punkt will ich in Übereinstimmung mit Herrn Prof. Sturm als das *involutorische Zentrum der beiden Strahlenbüschel* bezeichnen.

Gibt es ausserhalb K^2 einen sich selbst konjugierten Punkt, so ist die Projektivität auf allen Strahlen durch ihn Identität, alle Punkte sind sich selbst konjugiert, O_1, O_2 sind zusammengefallen und die Strahlenbüschel-Projektivität ist Idendität.

(2.) *Der Kegelschnitt* K^2 *sei gegeben.* Je zwei Scheitel O_1, O_2 von projektiven Strahlenbüscheln, welche die vorgelegten Bedingungen erfüllen, will ich „*assoziierte*“ Punkte nennen. K^2 ist äquivalent mit 5 Paaren konjugierter

Punkte, nämlich mit 5 sich selbst konjugierten Punkten[1]). Jeder Punkt der Ebene ist sich selbst assoziiert, denn zwei identische Strahlenbüschel um ihn haben, wie alle Punkte der Ebene, so auch die von K^2 zu sich selbst konjugierten. Von diesen Lösungen, deren Analogon auch in allen späteren Abschnitten auftritt, sehe ich ab. *Ausserdem ist jedem Punkte von* K^2 *jeder Punkt von* K^2 *assoziiert* und die Projektivität der Strahlenbüschel um 2 beliebig herausgegriffene Punkte O_1, O_2 von K^2 ist eindeutig bestimmt.

(3.) *Zu* K^2 *trete ein Paar konjugierter Punkte hinzu* $A_1;A_2$.

Damit ist die Projektivität konjugierter Punkte auf A_1 A_2 festgelegt, denn es gibt nur eine, die $A_1;A_2$ zu einem Paare und die Schnittpunkte X, Y mit K^2 zu Koinzidenzelementen hat. Jedem Punkte O_1 von K^2 ist ein Punkt O_2 assoziiert: O_1 A_1 schneide K^2 noch in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}A_2$ schneidet K^2 dann noch in O_2. *Auf* K^2 *liegt eine Projektivität von assoziierten Punkten* O_1, O_2, *alle projektiven Strahlenbüschel haben die Projektivität konjugierter Punkte auf* A_1 A_2 *gemein.*

Die Projektivität auf K^2 wird dann und nur dann *Involution*, wenn $A_1;A_2$ konjugiert bezüglich K^2 sind, also die Projektivität auf A_1 A_2 auch eine Involution ist; Involutionszentrum ist der Pol P von A_1 A_2 bezüglich K^2. Denn jeder Strahl durch P schneidet in K^2 zwei Punkte ein, welche Eckpunkte eines dem K^2 eingeschriebenen vollständigen Vierecks sind mit den Diagonalpunkten P, A_1, A_2; also wenn ich sie mit O_1 und O_2 bezeichne: O_1 A_1, O_2 A_2 sowohl, wie O_1 A_2, O_2 A_1 schneiden sich auf K^2.

Die Koinzidenzelemente der Projektivität assoziierter Punkte sind die Punkte $(A_1\ A_2, K^2)$. Sie verlangen Identität der Strahlenbüschel.

Bei 6 Paaren konjugierter Punkte in allgemeiner Lage $A_1, B_1 \ldots G_1;A_2, B_2 \ldots G_2$ in den Ebenen ε_1 und ε_2 gibt es in ε_1 und ε_2 je eine C^3 durch die 6 Punkte derart, dass die

---

[1]) Die allgemeine Frage siehe: Sturm, Math. Ann. Bd. I. N. 4ff., Schubert a. a. O § 30. S. 205f.

beiden C^3 zweimal eindeutig bezogen sind, einmal durch Paare assoziierter Punkte und zweitens durch Paare, die für alle möglichen projektiven Strahlenbüschel konjugiert sind [1]). Hier sind beide C^3 in eine zusammengefallen und diese hat sich in K^2 und die Grade $A_1 A_2$ zerspalten. Beide Bestandteile tragen für sich zwei Projektivitäten. Auf K^2 ist die der konjugierten, auf $A_1 A_2$ die der assoziierten Punktepaare eine Identität; das letztere deswegen, weil zwei identische Strahlenbüschel um einen Punkt von $A_1 A_2$ alle Bedingungen befriedigen.

(4.) *Ausser* K^2 *seien zwei Paare konjugierter Punkte gegeben* $A_1;A_2$, $B_1;B_2$. Durch $A_1;A_2$ und $B_1;B_2$ sind auf den beiden Verbindungsgraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ die beiden Projektivitäten, die die Schnittpunkte mit K^2 zu Koinzidenzpunkten haben, also die Projektivitäten konjugierter Punkte für alle möglichen projektiven Strahlenbüschel bestimmt. $A_1;A_2$ und $B_1;B_2$ rufen auf K^2 je eine Projektivität von assoziierten Punkten hervor, beide haben 2 Paare gemeinsam. Da die Projektivität der Strahlenbüschel schon durch den Kegelschnitt eindeutig festgelegt ist, so werden $A_1;A_2$ und $B_1;B_2$ durch dieselbe Beziehung befriedigt. *Bei zwei Paaren konjugierter Punkte gibt es zwei Paare assoziierter Punkte auf* K^2.

Die Konstruktion dieser beiden Paare sei ohne Beweis angegeben: Ich suche die beiden Punkte $C_2{}^A$, $C_2{}^B$, die dem Schnittpunkt $(A_1 A_2, B_1 B_2) \equiv C_1$ in den durch $A_1;A_2$, $B_1 ; B_2$ auf den Verbindungsgraden festgelegten Projektivitäten entsprechen, verbinde sie, schneide die Verbindungsgrade mit K^2 in O_2 und O_2', verbinde diese mit C_1, schneide $O_2 C_1$ mit K^2 noch in O_1', $O_2' C_1$ mit K^2 noch in O_1, so sind $O_1 O_2$, $O_1' O_2'$ die beiden Paare assoziierter Punkte.

Sind $A_1;A_2$, $B_1;B_2$ beide konjugiert bezüglich K^2, so gibt es ein Paar involutorisch assoziierter Punkte O_1, O_2,

---

[1]) Diese Beziehungen finden sich in der zitierten Sturm'schen Arbeit (Math. Ann. Bd. 1. N. 12f.) nicht. Sie wurden in den Seminarübungen unter Herrn Prof. Sturm im S.S. 1904 behandelt.

nämlich die Schnittpunkte der Polaren von C_1 bezüglich K^2 mit K^2.

Zu den beiden Paaren assoziierter Punkte gesellt sich, um die Zahl drei, welche sich bei allgemeiner Lage von 7 Paaren konjugierter Punkte ergibt, vollzumachen, der sich selbst assoziierte Punkt $(A_1 A_2, B_1 B_2) \equiv C_1$ selbst, der durch 2 identische Strahlenbüschel alle Bedingungen befriedigt. Die projektiven Strahlenbüschel um die 3 Paare assoziierter Punkte haben nicht nur die Projektivität konjugierter Punkte auf $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gemein, sondern eine ganze zentrale[1]) quadratische Verwandtschaft von konjugierten Punkten.

(5.) Die Untersuchungen lassen sich ohne weiteres auf projektive Punktreihen in der Ebene, die einen Kegelschnitt, projektive Ebenenbüschel und Punktreihen im Raume, die eine Regelschar erzeugen, übertragen. Wir werden die Resultate auch in der letzten Gestalt anzuwenden Gelegenheit haben.

(6.) Wir brauchen eine *lineare Konstruktion der Projektivität auf einer Graden, welche durch die Koinzidenzelemente und ein Paar entsprechender Punkte* X, Y, A_1; A_2 *bestimmt ist, auch für den Fall, dass die Koinzidenzelemente imaginär, durch eine elliptische Involution repräsentiert sind.*

Wenn zwei projektive Punktreihen ineinander liegen, zu jedem Punkte $A_1 \equiv A_2'$ die entsprechenden A_2, A_1' konstruiert werden und in Bezug auf diese der dem $A_1 \equiv A_2'$ harmonisch zugeordnete Punkt $\bar{A}$ gesucht wird, so bilden die Punktepaare von der Art $A_1;\bar{A}$ diejenige Involution, welche die Koinzidenzelemente der Projektivität zu Doppelelementen hat[2]).

In unserem Falle wird die Rolle dieser Involution bezüglich der gesuchten Projektivität von der gegebenen Involution gespielt: Ich suche zu $A_1 \equiv A_2'$ den in Involution entsprechenden Punkt $\bar{A}$, dann zu A_2 den harmonisch zu-

---

[1]) vgl. Abschnitt (14).

[2]) Steiner-Schröter, Kegelschnitte. 1898. 3. Aufl. S. 63.

geordneten bezüglich A_1, $\bar{A}$, er heisst A_1', ferner suche ich zu $A_2 \equiv A_1''$ den entsprechenden Punkt in Involution $\bar{A}$, dann zu A_1 den bezüglich A_1'', $\bar{A}$ harmonisch zugeordneten A_2''. Die Paare $A_1;A_2$, $A_1';A_2'$, $A_1'';A_2''$ bestimmen eine Projektivität, deren in oben angegebener Weise zugehörige Involution die gegebene ist, und die darum die Doppelelemente der Involution zu Koinzidenzelementen hat.

§ 2. Konjektive Punktreihen.

a. In der Ebene.

(7.) *Gegeben ist in der Ebene ein Kegelschnitt* K^2 *und eine Anzahl von Gradenpaaren; welches ist der Ort oder die Zahl der Graden*, die solche konjektiven Punktreihen tragen, dass die Schnittpunkte mit K^2 Koinzidenzpunkte, die mit den Gradenpaaren Punktepaare der Projektivität sind, oder — wie ich mich der Kürze halber ausdrücken will — *welche* K^2 *und die Gradenpaare in konjektiven Punktreihen schneiden?*

Ist K^2 allein gegeben, so sind die konjektiven Punktreihen auf jeder Graden der Ebene in einfach unendlicher Mannigfaltigkeit unbestimmt. Tritt ein Gradenpaar a_1; a_2 hinzu, so ist auf jeder Graden die Projektivität eindeutig bestimmt, ausser auf a_1, a_2 selbst.

(8.) *Der Ort der Strahlen, welche* K^2 *und zwei Gradenpaare* $a_1;a_2$, $b_1;b_2$ *in konjektiven Punktreihen schneiden, ist eine Kurve dritter Klasse* C_3.

Denn: Ist z ein Strahl, der K^2, $a_1;a_2$, $b_1;b_2$ in konjektiven Punktreihen schneidet, sind X Y seine Schnittpunkte mit K^2, so gilt:

$$X\,Y\;a_1\;b_1 \;\overline{\wedge}\; X\,Y\;a_2\;b_2, \text{ also:}$$
$$X\,Y\;a_1\;b_1 \;\overline{\wedge}\; Y\,X\;b_2\;a_2.$$

Umgekehrt folgt die erste Beziehung aus der zweiten. Darum ist der gesuchte Ort identisch mit dem Orte der Strahlen, welche K^2, $a_1;b_2$, $a_2;b_1$ in Punktepaaren einer Involution schneiden. Der Ort der Graden, welche drei Kegelschnitte — hier sind zwei davon zerfallen — in Punktepaaren einer Involution schneiden, ist eine Kurve dritter

Klasse C_3, die Cayleysche Kurve des durch die drei Kegelschnitte bestimmten Netzes [1]). Dieselbe C_3 ist zugleich der Ort der Gradenpaare dieses Netzes. Ihre Graden schneiden nicht nur die drei konstituierenden, sondern alle Kegelschnitte des Netzes in Punktepaaren einer Involution. Darum gilt:

Die Tangenten der C_3 schneiden nicht nur K^2, $a_1;a_2$, $b_1;b_2$ in konjektiven Punktreihen, sondern K^2 und jede zwei Paare von Graden $c_1;c_2$, $d_1;d_2$, wofern $c_1;d_2$, $c_2;d_1$ Gradenpaare des durch K^2, $a_1;b_2$, $a_2;b_1$ konstituierten Kegelschnittnetzes sind, oder, in der Terminologie der ebnen Kurven dritter Klasse, wofern $c_1;d_2$, $c_2;d_1$ zwei Paare konjugierter Tangenten der C_3 in demselben System sind, dem auch $a_1;b_2$ angehören.

Die C_3 ist die gesuchte Ortskurve nicht nur für $a_1;a_2$, $b_1;b_2$, sondern für ∞^2 Paare ihrer Tangenten.

Die Seiten des vollständigen Vierecks $(a_1\,K^2)$, $(b_2\,K^2)$ sind Gradenpaare des Kegelschnittnetzes also auch zu zwei und zwei konjugierte Tangenten der C_3; dasselbe gilt von den Seitenpaaren des vollständigen Vierecks $(a_2\,K^2)$, $(b_1\,K^2)$. Da nun das Gradenpaar, welches zwei Paare konjugierter Tangenten zu dem vollständigen Viereck ergänzt, das jene Paare zu Gegenseiten hat, selbst ein Paar konjugierter Tangenten der C_3 ist, so sind von den oben genannten sechs Paaren konjugierter Tangenten nur vier unabhängig, aus diesen aber alle Tangenten der C_3 linear konstruierbar.

(9.) *Es gibt sieben Grade, welche von* K^2 *und drei Strahlenpaaren* $a_1;a_2$, $b_1;b_2$, $c_1;c_2$ *in konjektiven Punktreihen geschnitten werden.*

Denn von $a_1;a_2$, $b_1;b_2$ allein und von $a_1;a_2$, $c_1;c_2$ allein werden die Tangenten je einer C_3 in konjektiven Punktreihen geschnitten. Beide C_3 haben 9 Tangenten gemeinsam. Wofern auf diesen die Schnittpunkte mit $a_1;a_2$ die Projektivität schon eindeutig festlegen, schneiden $b_1;b_2$

[1]) Schroeter, Theorie der ebnen Kurven dritter Ordnung, Leipzig 1888, §§ 5 bis 8.

und $c_1;c_2$ Paare derselben Projektivität ein, so wie es hier verlangt wird. Auf zweien der gemeinsamen 9 Tangenten legen $a_1;a_2$ die Projektivität aber nicht fest, nämlich auf a_1 und a_2 selbst.

b. Im Raume.

(10.) *Gegeben ist eine Fläche zweiten Grades* F^2 *und eine Anzahl von Ebenenpaaren, gefragt nach dem Orte oder der Anzahl der Strahlen, welche die gegebenen Elemente in konjektiven Punktreihen schneiden.*

F^2 und ein Ebenenpaar $\alpha_1;\alpha_2$ bestimmen auf jeder Graden des Raumes eindeutig eine Projektivität ausser auf den Graden in α_1 und α_2 und den Strahlen der F^2 selbst.

F^2 *und zwei Ebenenpaare* $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$ *schneiden alle Strahlen eines Komplexes dritten Grades in konjektiven Punktreihen.*

Denn in jeder beliebigen Ebene liegt, wie aus (8) hervorgeht, eine Kurve 3ter Klasse von Strahlen des gesuchten Ortes.

In dem Komplexe sind folgende Kongruenzen leicht erkennbar: die Bündel um die 4 Punkte $(\alpha_1\,\alpha_2, F^2)$, $(\beta_1\,\beta_2, F^2)$, die Strahlenfelder in den Ebenen α_1, α_2, β_1, β_2, die zwei Strahlennetze mit den Leitgraden $\alpha_1\,\beta_1$, $\alpha_2\,\beta_2$, und $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$.

(11.) *Der Ort der Strahlen, die von* F^2 *und drei Ebenenpaaren* $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$, $\gamma_1;\gamma_2$ *in konjektiven Punktreihen geschnitten werden, ist eine Kongruenz* [7,7].

Denn die beiden Komplexe, welche $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$ und $\alpha_1;\alpha_2$, $\gamma_1;\gamma_2$ in konjektiven Punktreihen schneiden, haben eine Kongruenz [9,9] gemein. Die Strahlen dieser Kongruenz schneiden nur dann nicht F^2 und alle drei Ebenenpaare in konjektiven Punktreihen, wenn die Projektivität durch F^2 und $\alpha_1;\alpha_2$ allein nicht festgelegt ist, das tritt ein in den beiden Strahlenbündeln mit den Scheiteln $(\alpha_1\,\alpha_2, F^2)$ und in den Strahlenfeldern α_1, α_2. Die übrigen Strahlen bilden eine Kongruenz [7,7]. Dass in einer Ebene 7 Strahlen liegen, stimmt mit dem Resultat von (9) überein.

Dieser Kongruenz gehören unter anderem folgende Regelflächen an:

Die sechs Kurven dritter Klasse in je einer der Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, deren Strahlen F^2 und die beiden anderen Paare in konjektiven Punktreihen schneiden (s. (8.)); die Kegel dritten Grades von den sechs Punkten $(\alpha_1\ \alpha_2, F^2)$, $(\beta_1\ \beta_2, F^2)$, $(\gamma_1\ \gamma_2, F^2)$ aus, die das gleiche tun; die Kegel zweiten Grades von den Punkten $(\alpha_1\ \beta_1, F^2)$, $(\alpha_2\ \beta_2, F^2)$ u.s.w. bezüglich nach den Kegelschnitten $(\gamma_2\ F^2)$, $(\gamma_1\ F^2)$ u. s. w., die Regelschar mit den Leitgraden $\alpha_1\ \alpha_2$, $\beta_1\ \beta_2$, $\gamma_1\ \gamma_2$, die beiden Regelscharen der F^2 u. a.

(12.) *Der Ort der Strahlen, die von* F^2 *und 4 Ebenenpaaren* $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$, $\gamma_1;\gamma_2$, $\delta_1;\delta_2$ *in konjektiven Punktreihen geschnitten werden, ist eine Regelfläche 26ter Ordnung.*

Denn die durch F^2 und die Paare $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$, $\gamma_1;\gamma_2$ bestimmte Kongruenz und der durch F^2 und $\alpha_1;\alpha_2$, $\delta_1;\delta_2$ bestimmte Komplex haben eine Regelfläche von der Ordnung $3.7 + 3.7 = 42$ gemein. Auf Strahlen des gesuchten Ortes kann ich aber nur schliessen, wenn F^2 und $\alpha_1;\alpha_2$ allein die Projektivität festlegen. Das geschieht nicht auf den Strahlen der in α_1 und α_2 liegenden Kurven dritter Klasse der Kongruenz, auf den Strahlen der von den Punkten $(\alpha_1\ \alpha_2, F^2)$ kommenden Kegel dritter Ordnung der Kongruenz, endlich auf den Strahlen der beiden Regelscharen von F^2. Es sondern sich also Regelflächen von insgesamt 16tem Grade ab und es bleibt eine solche 26 ten Grades.

Der erhaltenen Regelfläche gehören u. a. folgende Strahlen an: In jeder der Ebenen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ die 7 Graden, welche von den drei anderen Paaren nach dem vorigen Satze in konjektiven Punktreihen geschnitten werden, in den Bündeln mit den Scheiteln $(\alpha_1\ \alpha_2, F^2)$, $(\beta_1\ \beta_2\ F^2)$ u.s.w. die 5 Strahlen, die das gleiche tun, ohne der F^2 ganz anzugehören, ferner in jeder der beiden Regelscharen von F^2 8 Strahlen. Diese ergeben sich so: Jeder Strahl x_1 einer der Regelscharen schneidet die Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ in einem bestimmten Doppelverhältnis und bestimmt dadurch einen

tetraedralen Komplex von Strahlen, welche α_2, β_2, γ_2, δ_2 unter demselben Doppelverhältnis schneiden. Dieser hat mit der Regelschar der F^2 vier Strahlen gemein. Lasse ich in einer Regelschar sich zwei Strahlen entsprechen, die die vier Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1 und α_2, β_2, γ_2, δ_2 unter dem gleichen Doppelverhältnis schneiden, so entsteht eine Verwandtschaft [4,4]. Ihre 8 Koinzidenzelemente schneiden die 4 Ebenenpaare in konjektiven Punktreihen, deren Koinzidenzelemente auf F^2 liegen.

(13.) *Strahlen, welche von* F^2 *und 5 Ebenenpaaren* $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$ . . . $\varepsilon_1;\varepsilon_2$ *in konjektiven Punktreihen geschnitten werden, gibt es 38.*

Denn die durch die 4 Ebenenpaare $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$, $\gamma_1;\gamma_2$, $\delta_1;\delta_2$ bestimmte Regelfläche und der durch die Paare $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$ bestimmte Komplex haben $3.26 = 78$ Strahlen gemein. Davon sind aber wieder alle auszuscheiden, auf denen F^2 und $\alpha_1;\alpha_2$ allein die Projektivität nicht festlegen. Es sind das die je 7 Strahlen der Regelfläche in α_1 und α_2, die je 5 Strahlen in den Bündeln mit den Scheiteln (α_1 α_2, F^2), die je 8 Strahlen in jeder Regelschar von F^2. Es bleiben also $78 - 14 - 10 - 16 = 38$.

§ 3. Eine zentrale quadratische Verwandtschaft.

(14.) Σ_1, Σ_2 sind ineinanderliegende Räume, eine F^2 gehört beiden an; ferner liegt ein Punkt O_1 in Σ_1, eine Ebene ω_2 in Σ_2. Ich lasse jedem Punkte Z_1 von Σ_1 den Punkt Z_2 seiner Verbindungsgraden mit O_1 entsprechen, der ihm in derjenigen Projektivität zugeordnet ist, in welcher die Schnittpunkte mit F^2 Koinzidenzpunkte, O_1 und der Schnittpunkt mit ω_2 entsprechende Punkte sind. *Die entstehende Verwandtschaft ist ein-eindeutig* — das bedarf keines Beweises — *sie ist ferner in beiderlei Sinne quadratisch.*

Denn: der Bündel um den Punkt O_1, den ich als neutralen Punkt mit O, als Punkt von Σ_2 mit O_2' bezeichne, besteht aus sich selbst entsprechenden Graden und Ebenen. Einer Graden z_1 entspricht eine Kurve in der Ebene Oz_1.

o_1 sei eine beliebige Grade durch O_1, l_2 eine ganz beliebige Grade in derselben Ebene. Die Ordnung der gesuchten Kurve ist gleich der Anzahl von Graden, welche F^2, $z_1;l_2$, und $o_1;\omega_2$ in konjektiven Punktreihen schneiden und durch O gehen, abzüglich o_1 selbst. Deren gibt es nach (8) zwei, weil o_1 selbst eine Tangente der dort nachgewiesenen Kurve dritter Klasse ist.

Ebenso gut hätte ich von einer Graden z_2 von Σ_2 ausgehen können. Darum ist die Verwandschaft *in beiderlei Sinne* quadratisch.

Auf den Graden des Kegels von O nach dem Kegelschnitt $(\omega_2 F^2)$ herrscht ausgeartete Projektivität; ω_1' sei die Ebene seines zweiten Schnittkegelschnitts mit F^2. *Hauptpunkte* in Σ_2 sind die Punkte des Kegelschnitts $(\omega_2 F^2)$, deren jedem seine Verbindungsgrade mit O entspricht, und der Punkt O_2', dem die ganze Ebene ω_1' entspricht. Hauptpunkte in Σ_1 sind die Punkte des Kegelschnitts $(\omega_1' F^2)$, denen ihre Verbindungsgrade mit O zugeordnet ist, und der Punkt O_1; ihm entspricht die Ebene ω_2 [1]). Das Gebüsche der den Ebenen von Σ_1 entsprechenden Flächen zweiten Grades ist durch den gemeinsamen Kegelschnitt $(\omega_2 F^2)$ und den Punkt O_2 bestimmt, es ist, wie es sein muss, homaloidisch. Seine Jacobische Fläche besteht aus dem Kegel von O nach $(\omega_2 F^2)$ und der doppelt zählenden Ebene ω_2. Analoges gilt vom Flächengebüsche in Σ_1. Die quadratische Verwandschaft ist vor der allgemeinen dadurch wesentlich ausgezeichnet, dass sie eine Fläche zweiter Ordnung F^2 von sich selbst entsprechenden Punkten besitzt und auf der Ebene von O nach der Schnittgraden ω_1' ω_2 eine involutorische quadratische Inversion enthält.

Uebrigens liegt die Grade ω_1' ω_2 auf der Polar-Ebene von O bezüglich F^2 und ω_1', ω_2 sind harmonisch zu dieser Polar-Ebene und der Ebene nach O hin.

---

[1]) Cremona, Sulle Trasform. raz. nello spazio, Ann. di Mat II_2 S. 114, Abschnitt 21, gibt den Typus der quadratischen Verwandtschaften, dem diese angehört.

Ich will diese quadratische Verwandtschaft, als *„zentrale quadratische“* Verwandtschaft zitieren. In jeder Ebene durch O liegt eine *ebene zentrale quadratische Verwandtschaft*, auf deren Eigenschaften ich nach Behandlung der räumlichen nicht mehr einzugehen brauche.

(15.) *Halte ich* F^2 *und* $O \equiv O_1 \equiv O_2'$ *fest und lasse* ω_2 *ein Büschel um eine Grade* o_2 *durchlaufen*, so bleibt die Projektivität auf den Strahlen durch O in der Ebene $O\,o_2$ erhalten; ω_1' durchläuft auch ein Büschel um eine Grade o_1' in der Ebene Oo_2, die beiden einem Punkte in dem einen und anderen Sinne entsprechenden Punkte durchlaufen seine Verbindungsgrade mit O, die einer Ebene entsprechenden Flächen zweiter Ordnung durchlaufen je ein Büschel, dessen Grundkurve aus dem Schnittkegelschnitt der Ebene mit F_2 und je dem Kegelschnitt in der Ebene $O\,o_2$ besteht, der der Schnittgraden der gegebenen Ebene mit dieser in der festliegenden ebenen Verwandtschaft entspricht. Alle diese Bewegungen geschehen projektiv zu der Drehung von ω_2.

(16.) *Ich halte* F_2 *und* ω_2 *fest und lasse* O_1 *auf einer Graden* o_1 *laufen.* $\zeta_2 \equiv \varepsilon_1$ sei eine beliebige Ebene. Für 2 Lagen von O_1 geht die entsprechende Fläche $\zeta_1{}^2$ bezw. $\varepsilon_2{}^2$ durch einen willkürlichen Punkt $X_1 \equiv Y_2$, nämlich so oft, als es Strahlen durch $X_1 \equiv Y_2$ gibt, welche F^2, $X_1;\zeta_2$, $o_1;\omega_2$ bezw. F^2, $Y_2;\varepsilon_1$, $o_1;\omega_2$ in konjektiven Punktreihen schneiden. Deren gibt es aber zwei, was aus derselben Betrachtung wie der in dem Beweise des Hauptsatzes von (14) hervorgeht.

Das der Ebene ζ_2 zugehörige Flächensystem hat die Eigenschaft durch jeden Punkt 2 Flächen zu senden, und jede Fläche gehört der ζ_2 nur für eine Lage von O_1 zu. Das einer Ebene ε_1 zugehörige Flächensystem aber ist ein Büschel mit den Kegelschnitten $(\varepsilon_1\ F^2)$ und $(\omega_2\ F^2)$ als Grundkurve, und jede Fläche entspricht der ε_1 für die zwei Lagen von O_1, welche sie selbst in o_1 einschneidet.

II. Korrelative Räume bei gegebener Punktkernfläche.

§ 1. Die räumliche Korrelation.

(17.) Ich will einige Eigenschaften der räumlichen Korrelation unter für unser Problem geeigneten Gesichtspunkten rekapitulieren:

Zwei ineinanderliegende Räume Σ_1 und Σ_2 sind korrelativ bezogen. Zwei gleichartige oder ungleichartige Raumelemente heissen „*konjugiert*“, wenn sie mit den gegenseitigen polaren Elementen inzident sind.

Jede Grade trägt eine Projektivität konjugierter Punkte sowohl, wie eine Projektivität konjugierter Ebenen, jedes Strahlenbüschel eine solche konjugierter Strahlen. Aus den Koinzidenzelementen dieser Projektivitäten folgt: *Die Orte der sich selbst konjugierten Punkte, Ebenen, Graden d. i. die Punkt- und Ebenenkernfläche, der Gradenkernkomplex sind sämtlich zweiten Grades. Sie heissen* F^2, Φ^2, C^2.

Die Projektivität konjugierter Punkte auf einem Strahle von C^2 ist ausgeartet, denn jedem seiner Punkte ist in dem einen und anderen Sinne der Schnittpunkt des Strahls mit dem einen und anderen seiner polaren Strahlen konjugiert. Ist umgekehrt die Projektivität auf einem Strahle ausgeartet, so wird er in den singulären Punkten von seinen beiden polaren Strahlen geschnitten, ist also sich selbst konjugiert. Es gilt daher: C^2 *ist zugleich der Ort der Strahlen, auf denen ausgeartete Projektivität konjugierter Punkte und — ebenso zu sehen — ausgeartete Projektivität konjugierter Ebenen*

herrscht. Die singulären Elemente sind die Schnittpunkte des Strahls mit F^2 bezw. die Tangentialebenen von dem Strahl an Φ^2.

Sind A_1; α_2 polar, so tragen die Strahlen des Kegels von A_1 nach dem Kegelschnitt (α_2 F^2) ausgeartete Projektivität konjugierter Punkte. Die Ebene des zweiten Schnittkegelschnitts dieses Kegels mit F^2 muss die dem Punkte $A_1 \equiv A_2'$ im anderen Sinne entsprechende Ebene α_1' sein. Die Projektivitäten konjugierter Punkte auf den Strahlen durch einen Punkt konstituieren eine zentrale quadratische Verwandschaft im Sinne von (14).

Es gilt: *der von einem Punkte kommende Kegel von* C^2 *schneidet in* F^2 *zwei Kegelschnitte ein, welche den beiden dem Punkte polaren Ebenen angehören.*

(18.) *Es gibt einen linearen Komplex* K^1 *von Graden, welche Involutionen konjugierter Punkte tragen;* das Strahlenbüschel von einem Punkte aus geht nach der Schnittgraden seiner beiden entsprechenden Ebenen hin. *Ebenso gibt es einen zweiten linearen Komplex* Γ^1 *von Strahlen, die Involutionen konjugierter Ebenen tragen.*

K^1 und Γ^1 haben ein Strahlennetz gemein, seine Leitgraden sind die Diagonalen eines den F^2 und Φ^2 gemeinsamen *windschiefen Vierseits*, dessen Ecken die zugehörige Vierseitsebene involutorisch entspricht.

Der Ort der Schnittstrahlen zweier einem Punkte entsprechenden Ebenen und der Ort der Verbindungsgraden zweier einer Ebene entsprechenden Punkte sind identisch und stellen einen tetraedralen Komplex dar, welchem das von dem obigen Vierseit bestimmte „Haupttetraeder“ zugrunde liegt. *Dieser Komplex* der *„Wechselstrahlen“* heisse W^2.

Die beiden Polarebenen eines Punktes in Korrelation gehören demselben Ebenenbüschel an, wie seine Polarebenen bezüglich F^2 und bezüglich des zu K^1 gehörigen Nullsystems und sind harmonisch zugeordnet in bezug auf diese (14.). Und daraus lässt sich schliessen: Die beiden Graden, welche zu einem Strahle in Korrelation polar sind, liegen mit seinen Polaren nach F^2 und nach dem zu K^1 gehörigen

Nullsystem in einer Regelschar und sind harmonisch zugeordnet in Bezug auf diese[1]).

(19.) Was wird aus den ausgezeichneten Gebilden der Korrelation insbesondere aus den Kerngebilden, wenn die Korrelation selbst ausartet? Wir können uns auf die Ausartungen der ersten Stufe beschränken, weil die anderen Kombinationen von diesen sind[2]).

Die *zentrale Korrelation* besteht aus zwei korrelativen Bündeln O_1, O_2. Jeder Ebene eines Bündels entsprechen alle Punkte ihrer correspondierenden Graden im andern Bündel, jeder beliebigen Ebene entspricht der Scheitel des Bündels im anderen Raume. F^2 ist die von den Bündeln erzeugte Fläche, Φ^2 zerfällt in die Bündel um die beiden Scheitel, C^2 bleibt allgemein, desgleichen K^1, Γ^1 ist das Gebüsche mit der Achse $O_1 O_2$, das Hauptvierseit ist das windschiefe Vierseit auf F^2, welches O_1 und O_2 zu Ecken hat. W^2 bleibt ebenfalls ein gewöhnlicher tetraedraler Komplex. Er ist jetzt, aufgefasst als System der den Punkten des Raumes doppelt konjugierten Graden, Ort der Schnittgraden von je zwei solchen Ebenen aus O_1 und O_2, deren entsprechende Strahlen sich schneiden. Aufgefasst als System der den Ebenen des Raumes doppelt konjugierten Graden, entsteht er, wie folgt: Dem Ebenenbüschel um $O_1 O_2$ korrespondiert in jedem der beiden Bündel ein Strahlenbüschel. Lasse ich zwei Strahlen dieser Büschel entsprechend sein, welche derselben Ebene durch $O_1 O_2$ korrespondieren, so sind die Strahlenbüschel in Projektivität. Das System erster Stufe von Strahlennetzen, die je ein Paar entsprechender Strahlen zu Leitgraden haben, bildet den tetraedralen Komplex W^2[3]).

Die *planare Korrelation* verhält sich dual.

---

[1]) Diese Sätze finden sich zerstreut in: Schroeter, Crelles Journal 77. S. 121 ff. Sturm, Math. Ann. 19. S. 475 ff. Montesano, Su la Corrispondenza reciproca fra due sistemi dello spazio, Napoli 1885. Reye, Geom. d. L. 3te Aufl. II. S. 23, 128. III. Anhang S. 222.

[2]) Hirst, Proc. of Lond. Math. Soc. Vol. 21. S. 93.

[3]) Sturm, Liniengeometrie Bd. I. 1892. Abschnitt 257.

(20.) Die *achsiale* besteht aus zwei Graden o_1, o_2, deren Punktreihen zueinander und deren Ebenenbüschel untereinander projektiv bezogen sind. Jede Ebene eines der beiden Büschel entspricht allen Punkten der in dieser Projektivität entsprechenden Ebene des anderen Büschels; jeder Punkt einer der beiden Graden entspricht allen Ebenen durch den Punkt der anderen, der ihm in dieser Projektivität zugeordnet ist.

F^2 ist das Erzeugnis der projektiven Ebenenbüschel, Φ^2 das Erzeugnis der projektiven Punktreihen um und auf o_1 und o_2, C^2 zerfällt in die beiden Gebüsche mit den Achsen o_1 und o_2, in dieselben Gebüsche zerfällt auch W^2, während K^1 und Γ^1 allgemein bleiben. Das Hauptvierseit besteht aus o_1, o_2 und den beiden anderen den F^2 und Φ^2 gemeinsamen Graden.

(21.) Bei spezieller Lage der Achsen und spezieller Gestalt der Projektivitäten auf ihnen übersieht man die Spezialisierung der Hauptgebilde unschwer. Uns interessiert besonders der Fall, dass die *Achsen zusammenfallen und die Ebenenbüschelprojektivität zur Identität* wird. In diesem Falle nämlich ist F^2 völlig unbestimmt, *alle Punkte des Raumes sind sich selbst konjugiert*, da jedem seine Verbindungsebene mit der Achse in beiderlei Sinne entspricht.

Einer beliebigen Ebene entsprechen in dem einen und andern Sinne zwei verschiedene ausser ihr liegende Punkte, nämlich diejenigen, welche in der Konjektivität auf der Achse ihrem Schnittpunkt mit der Achse zugeordnet sind. Φ^2 zerfällt in die beiden Bündel um die Koinzidenzpunkte der konjektiven Punktreihen auf der Achse, C^2 in das doppelt zählende lineare Gebüsche, das die Achse der Korrelation selbst zur Achse hat.

(22.) Darum ist, wenn jedem Punkte des Raumes eine Ebene involutorisch entspricht, doch der Schluss auf Polar- oder Nullkorrelation d. h. dass auch jeder Ebene ein Punkt involutorisch entspricht, nicht erlaubt, und wenn alle Punkte des Raumes sich selbst konjugiert sind, so darf man doch nicht schliessen, dass auch alle Ebenen sich selbst konjugiert

sind, d. h. dass Nullkorrelation herrscht, sondern man muss sagen: *Sind alle Punkte des Raumes sich selbst konjugiert, so herrscht entweder Nullkorrelation* — in diesem Falle gilt durchweg involutorisches Entsprechen, und auch alle Ebenen sind sich selbst konjugiert — *oder es herrscht spezielle achsiale Korrelation mit zusammengefallenen Achsen und identischen Ebenenbüscheln* — hier ist das Entsprechen i. a. nicht durchweg involutorisch, und die Ebenen sind sich nicht sämtlich selbst konjugiert. Dies tritt vielmehr nur ein, wenn die Punktreihenprojektivität auf der Achse involutorisch bzw. Identität geworden ist. *Nur das letztere ist eine Ausartung der Nullkorrelation*; der lineare Komplex ist ein Gebüsche.

§ 2. **Die Bedingungen.**

(22.) *Wir wollen nun das System von räumlichen Korrelationen betrachten, denen eine vorgegebene* F^2 *als Punktkernfläche gemeinsam ist.*

Zur Festlegung einer räumlichen Korrelation sind 15 einfache Bedingungen oder eine damit äquivalente Anzahl von Bedingungen höherer Vielfachheit notwendig. Wir beschränken uns auf „elementare“ Bedingungen, welche in Paaren gleichartiger oder ungleichartiger konjugierter Elemente bestehen.

Einfache elementare Bedingungen sind:

Ein Paar konjugierter Punkte $[A_1 ; A_2] = \mu$,

Ein Paar konjugierter Ebenen $[\alpha_1 ; \alpha_2] = \rho$,

Ein Paar konjugierter Graden $[a_1 ; a_2] = \nu$[1]).

Doppelte elementare Bedingungen sind:

Ein Punkt und eine konjugierte Grade $[A_1 ; a_2] = \bar{\mu}_1$, $[a_1 ; A_2] = \bar{\mu}_2$,

Eine Ebene und eine konjugierte Grade $[\alpha_1 ; a_2] = \bar{\rho}_1$, $[a_1 ; \alpha_2] = \bar{\rho}_2$,

Eine Grade und zwei ihr konjugierte Grade $[a_1 ; a_2', a_2''] = \bar{\nu}_1$, $[a_1', a_1'' ; a_2] = \bar{\nu}_2$.

---

[1]) Hirst, Proc. of Lond. Math. Soc. Vol. 21. S. 92 behandelt nur die einfachen elementaren Bedingungen, s. ebenda das Schlusswort.

Dreifache elementare Bedingungen sind:

Ein Punkt und seine Polar-Ebene $[A_1 ; \alpha_2] = \overline{\overline{\mu}}_1$, $[\alpha_1 ; A_2] = \overline{\overline{\mu}}_2$,

Eine Grade und ein konjugiertes Strahlenbüschel, d. h. ein Strahlenbüschel, dem die polare Grade angehören soll $[a_1 ; (A_2, \alpha_2)] = \overline{\overline{\nu}}_1$, $[(A_1, \alpha_1) ; a_2] = \overline{\overline{\nu}}_2$.

Eine Grade und drei konjugierte Grade oder eine konjugierte Regelschar

$[a_1 ; a_2', a_2'', a_2'''] = \overline{\overline{\nu}}_1'$, $[a_1', a_1'', a_1''' ; a_2] = \overline{\overline{\nu}}_2'$.

Eine *vierfache* elementare Bedingung ist:

Ein Paar polarer Graden $[a_1 ; a_2] = \overline{\overline{\nu}}$[1]).

(23). Liegt ausserhalb der Punktkernfläche einer räumlichen Korrelation ein sich selbst konjugierter Punkt, so liegen auf jedem Strahl, durch ihn 3 sich selbst konjugierte Punkte, die Projektivitäten auf diesen Strahlen sind daher Identitäten, und alle Punkte des Raumes sind sich selbst konjugiert. Daraus folgt: Sind 9 sich selbst konjugierte Punkte bekannt, so ist die durch sie bestimmte F^2 die Punktkernfläche der Korrelation, es sei denn, dass nicht alle Punkte des Raumes sich selbst konjugiert sind. Und hieraus:

Die vorgegebene Punktkernfläche F^2 ist zur Bestimmung einer Korrelation äquivalent mit 9 sich selbst konjugierten Punkten μ^9.

Wir werden also in unserem Problem zu der gegebenen F^2 noch 6 einfache Bedingungen oder mehrfache in äquivalenter Anzahl hinzutreten lassen können.

(24.) In unserem Systeme 6ter Stufe können *planare Korrelationen* garnicht enthalten sein, denn sie haben ihr Ebenenpaar zur Punktkernfläche.

Zentrale sind ∞^5 in ihm enthalten, nämlich die ∞^5 Bündel-Korrelationen, welche die F^2 erzeugen.

An *achsialen* kommen zwei verschiedene Typen in Betracht: Erstens gibt es ∞^5, deren Achsen einer Schar der F^2 ange-

---

[1]) Folgerichtiger wäre es hier, zu einer Graden vier konjugierte zu geben, sodass ihr eine der beiden Treffgraden polar sein müsste, doch vermeide ich diese Zweideutigkeit lieber.

hören, deren projektive Ebenenbüschel die andere erzeugen, und deren projektive Punktreihen ganz willkürlich sind.

Ferner hat jede spezielle achsiale Korrelation mit zusammengefallenen Achsen und identischen Ebenenbüscheln alle Punkte des Raumes, also auch die der gegebenen F^2 zu sich selbst konjugierten Punkten. Diese achsialen Korrelationen bilden eine *siebenfache Mannigfaltigkeit*, denn die gemeinsame Axe ist vierfach, die Punktreihenprojektivität auf ihr dreifach unbestimmt.

(25.) Die speziellen achsialen Korrelationen interessieren aber nur insoweit, als sie in dem Kontinuum der allgemeinen Korrelationen enthalten sind.

Es liege ein irgendwie herausgegriffenes einfaches Kontinuum von Korrelationen mit gemeinsamer F^2 vor. Auf einer beliebigen Graden variiert die Projektivität konjugierter Punkte mit den Korrelationen und geht bei jeder in dem System enthaltenen speziellen achsialen Korrelation in die Idendität über. α_1, β_1 seien zwei ganz beliebige Ebenen, ihre Pole A_2, B_2 beschreiben Raumkurven. Ich verbinde je zwei Punkte, die Pole von α_1 und β_1 in derselben Korrelation sind. Auf jeder dieser Graden sind diese Punkte und die Schnittpunkte mit α_1 bezw. β_1 Paare der Projektivität konjugierter Punkte in der zugehörigen Korrelation. Ist in dem Kontinuum eine spezielle achsiale Korrelation enthalten, so gehört die Achse der Regelfläche jener Verbindungsgraden an, denn sie enthält die Pole aller beliebigen Ebenen. Diese beiden Punkte und die Schnittpunkte α_1 bezw. β_1 sind jetzt Paare der Projektivität auf der Achse. Daraus folgt, dass die Projektivität konjugierter Punkte auf den wandernden Verbindungsgraden der Pole zweier Ebenen für eine in dem System enthaltene spezielle achsiale Korrelation kontinuierlich übergeht in die Projektivität auf der Achse, und dass, da dies für alle Projektivitäten konjugierter Punkte gilt, auch diese Projektivität ihre Koinzidenzelemente in den Schnittpunkten der F^2 hat. Also: *In unser System 6ter Stufe von Korrelationen gehen nur*

diejenigen speziellen achsialen Korrelationen ein, die bei beliebig gelegener Achse die Schnittpunkte mit der F^2 *zu Koinzidenzelementen der Punktreihenprojektivität haben; und das sind* ∞^5.

(26.) Die einfache Bedingung für die Korrelation zentral zu sein, heisse π, diejenige achsial zu sein mit zusammengefallenen Achsen und identischen Ebenenbüscheln heisse Ψ diejenige, so axial zu sein, dass die projektiven Ebenenbüschel die F^2 wirklich erzeugen, heisse Ψ'.

Mit den für die Bedingungen eingeführten Symbolen operieren wir nach Schuberts Beispiel[1]). Ein symbolisches Produkt bezeichnet die Bedingung höherer Dimension, dass die durch die Faktoren dargestellten Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein sollen; eine Summe bezeichnet, dass einer von den Summanden erfüllt sein soll. Schliesslich soll uns ein Symbol nicht nur die Bedingung bedeuten, sondern in einem System von Korrelationen, in dem sie grade hinreicht, um eine endliche Anzahl auszuscheiden, eben diese Anzahl der in dem System enthaltenen lösenden Korrelationen.

§ 3. Punktbedingungen.

a. Ein, zwei, drei Paare konjugierter Punkte.

(27.) Wir wenden uns vornehmlich den aus Paaren konjugierter Punkte bestehenden Bedingungsgruppen zu und fragen zunächst nach abhängigen Paaren konjugierter Punkte, welche durch gegebene mitbestimmt sind:

Ein Paar konjugierter Punkte $[A_1; A_2] = \mu$ bestimmt die Projektivität konjugierter Punkte auf der Verbindungsgraden, welche die Schnittpunkte mit F^2 zu Koinzidenz-Elementen hat. Dieselbe ist allen ∞^5 Korrelationen, welche A_1; A_2 zu konjugierten Punkten haben und F^2 zur Punktkernfläche, gemeinsam.

---

[1]) Schubert, Calcül der abzählen den Geometrie, Leipzig 1879, § 2.

(28.) Die durch *zwei Paare konjugierter Punkte* $[A_1; A_2,\ B_1; B_2] = \mu^2$ bestimmten ∞^4 Korrelationen haben die Projektivität konjugierter Punkte auf den beiden Verbindungsgraden gemein.

Ist stattdessen ein Punkt A_1 und zwei ihm konjugierte Punkte oder eine konjugierte Grade a_2 gegeben, so ist damit die Projektivität conjugierter Punkte auf allen Strahlen des Strahlenbüschels von A_1 nach a_2 bestimmt. Die ∞^4 Correlationen haben die zentrale quadratische Verwandtschaft (14.) konjugierter Punkte in der Ebene $A_1\ a_2$ gemein. Insonderheit ist dem $A_1 \equiv A_2'$ auch im anderen Sinne in allen Korrelationen dieselbe Grade a_1' konjugiert, nämlich die Verbindungsgrade der beiden Punkte, welche die Strahlen von $A_1 \equiv A_2'$ nach den Punkten $(a_2\ F)$ noch in F_2 einschneiden. Daraus folgt, dass *wir die Bedingungen* μ_1 *und* μ_2 *nicht zu unterscheiden brauchen*, weil sie stets in Abhängigkeit auftreten.

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

(29.) *Mehr lässt sich schon bei drei Paaren konjugierter Punkte* $[A_1; A_2,\ B_1; B_2,\ C_1; C_2] = \mu^3$ *schliessen*: g_1 sei eine beliebige Grade der Regelschar, die sich auf die drei Graden $A_1\ A_2 = a$, $B_1\ B_2 = b$, $C_1\ C_2 = c$, stützt. Jedem Punkte von g_1 ist in jeder Korrelation des Systems ein Punkt auf der Graden konjugiert, die durch ihn geht und der durch a, b, c bestimmten Regelschar (abc) angehört. Der Ort dieser Punkte ist in jeder Korrelation das Erzeugnis der Projektivität zwischen der Regelschar und dem Ebenenbüschel der zu den Punkten von g_1 polaren Ebenen, also eine R^3, wie man aus der in einen beliebigen Kegelschnitt auf der Regelschar eingeschnittenen Korrespondenz [1, 2] sieht. Alle die R^3 nun, welche durch das System 3ter Stufe der den gegebenen Bedingungen genügenden Korrelationen hervorgerufen werden, haben 5 Punkte gemein, nämlich: die beiden Schnittpunkte der g_1 mit F^2, die sich ja in allen Korrelationen selbst konjugiert sind, und die drei auf den Graden a, b, c,

gelegenen Punkte, denn auf diesen ist die Projektivität konjugierter Punkte durch die gegebenen Paare festgelegt. Die R^3 haben aber zu den Graden der Regelschar (abc) sämtlich die gleiche Lage, indem sie jede von ihnen einmal schneiden, darum können sie nicht 5 Punkte gemein haben ohne identisch zu sein. Damit haben alle Korrelationen auf jeder Graden der Regelschar (abc) ein Paar konjugierter Punkte gemein. Es gilt:

Alle Korrelationen mit gemeinsamer F^2, *welche drei Paare konjugierter Punkte gemein haben, haben die Projektivität konjugierter Punkte auf allen Strahlen der durch deren Verbindungsgraden bestimmten Regelschar gemeinsam*[1]).

(30.) Die einer beliebigen Graden g_1 der verbundenen Regelschar zugehörige R^3 schneidet F^2 ausser in den Punkten $(g_1\ F^2)$ noch in 4 Punkten. Diese 4 Punkte sind allen R^3 dieser Art gemeinsam. Die Graden der Regelschar (abc) durch sie tragen ausgeartete Projektivität, weil diese Punkte zugleich sich selbst und einem andern entsprechen; dass sind die *4 sich selbst konjugierten Strahlen*, welche der Regelschar angehören, in allen Korrelationen.

(31.) In dem zu F^2 gehörigen Polarraum ist der Graden g_1 auch auf dieser Regelschar eine R^3 konjugiert, sie hat mit der von den Korrelationen des Systems herstammenden R^3 ausser den Punkten $(g_1\ F^2)$ noch zwei Punkte gemein, denn beide verhalten sich zu der Regelschar gleichartig. Die Strahlen der Regelschar (abc) durch diese beiden Punkte tragen *Involutionen konjugierter Punkte*. Sie sind also die Schnittelemente aller linearen Komplexe K^1 der Korrelationen mit der Regelschar.

---

[1]) Diese Verwandtschaft auf der Regelschar ist ein Ausschnitt einer räumlichen kubischen Verwandtschaft, wie (35) lehrt.

Bei dem allgemeinen durch vier Korrelationen konstituirten Gebüsche von Korrelationen tritt in jedem Raume eine Fläche vierter Ordnung auf; beide sind punktweise eindeutig auf einander bezogen, sodass entsprechende Punkte bezüglich aller Korrelationen konjugiert sind. Diese beiden Flächen sind hier in eine zusammengefallen, welche aus F^2 und der Regelschar (a, b, c) besteht.

Sind die drei gegebenen Paare konjugierter Punkte konjugiert bezüglich der F^2, so ist der *Polarraum* von F^2 in dem System von Korrelationen enthalten und auf allen Strahlen der Regelschar herrscht Involution konjugierter Punkte.

(32.) An *Nullkorrelationen* sind alle die in dem System enthalten, welche die Regelschar (abc) ganz in ihrem linearen Komplex von Nullstrahlen umfassen, und das sind ∞^2.

Jede Bündel-Korrelation, welche die F^2 erzeugt und die drei Paare zu konjugierten Punkten hat, gehört ebenfalls als räumliche *Zentral-Korrelation* dem System an.

Achsiale Korrelationen vom Typus Ψ' kann es nicht geben nach (1) bis (5), dagegen ist jede Grade der mit der Regelschar (abc) verbundenen Schar als gemeinsame Achse einer achsialen Korrelation vom Typus ψ zu brauchen, wobei die Punktreihenprojektiviätt noch einfach unbestimmt ist.

(33.) Ist *eine doppelte und eine einfache Punktbedingung* $[A_1; a_2,\ B_1; B_2] = \bar{\mu}\,\mu$ gegeben, so zerfällt die Regelschar in zwei Strahlenbüschel: Das eine ist das Strahlenbüschel um A_1 in der Ebene $A_1\ a_2$. Ferner: Schneide ich $B_1\ B_2$ mit der Ebene $A_1\ a_2$ in $C_1 \equiv C_2'$, dem $C_1 \equiv C_2'$ ist auf $C_1\ A_1$ ein Punkt C_2^A bezw. $C_1'^A$ konjugiert, und ebenso einer auf $B_1\ B_2$: $C_2{}^B$, $C_1'^B$. Darum ist ihm in allen Korrelationen die Verbindungsgrade $C_2^A\ C_2^B$ bezw. $C_1'^A\ C_1'^B$ konjugiert. Das Strahlenbüschel von $C_1 \equiv C_2'$ nach diesen Graden hin ist der zweite Bestandteil der Regelschar. Alle Korrelationen haben die beiden ebenen zentralen quadratischen Verwandtschaften in den Ebenen $A_1\ a_2$ und $B_1\ B_2\ A_1$ mit den Zentren $A_1 \equiv A_2'$ und $C_1 \equiv C_2'$ gemein.

(34.) Liegt eine *dreifache Punktbedingung* $\bar{\bar{\mu}}_1 = [A_1; \alpha_2]$ vor, so ist die Projektivität konjugierter Punkte auf allen Strahlen durch A_1 bestimmt. *Alle Korrelationen haben die räumliche zentrale quadratische Verwandtschaft mit dem Zentrum* A_1 *und der zugehörigen Hauptebene* α_2 *gemeinsam* (14.). Dem Punkte $A_1 \equiv A_2'$ ist in allen Korrelationen die zweite Hauptebene α_1', im anderen Sinne polar. Daraus geht hervor, dass ich *zwischen den Bedingungstypen* $\bar{\bar{\mu}}_1$ *und* $\bar{\bar{\mu}}_2$ *garnicht zu unter-*

scheiden brauche, weil sie stets in Abhängigkeit von einander auftreten:

$$\overline{\mu_1} = \overline{\mu_2} = \overline{\mu}$$

b. Vier Paare konjugierter Punkte.

(35.) *Es seien 4 Paare konjugierter Punkte*

$$[A_1;A_2,\ B_1;B_2,\ C_1;C_2,\ D_1;D_2] = \mu^4$$

gegeben. Die Verbindungsgraden heissen bezüglich a, b, c, d.

Nach (29.) haben alle ∞^2 Korrelationen jedenfalls die Projektivitäten auf allen Strahlen der Regelschar (a, b, c) gemeinsam. Ich verbinde die Grade d mit je 2 Strahlen von (a, b, c) durch eine neue Regelschar. Der Inbegriff aller dieser Regelscharen erfüllt das durch a, b, c, d bestimmte Strahlennetz [1]). In jeder dieser Regelscharen liegen 3 Strahlen, deren Projektivität konjugierter Punkte allen Korrelationen gemeinsam ist. Darum folgt aus (29): *Alle ∞^2 Korrelationen welche 4 Paare konjugierter Punkte gemein haben, haben die Projektivitäten konjugierter Punkte auf allen Strahlen des durch die 4 Verbindungsgeraden der Punktepaare festgelegten Strahlennetzes gemein.*

Durch jeden Punkt des Raumes geht nur ein Netzstrahl und auf jede Grade des Raumes stützt sich eine Regelschar des Netzes; wie in (29.) ist der Ort der den Punkten einer Graden — gleichgiltig zu welchem Raume ich sie rechne — konjugierten Punkte eine R^3. Darum gilt: *Allen Korrelationen liegt eine ein-eindeutige und in beiderlei Sinne kubische räumliche Verwandtschaft von konjugierten Punkten zu Grunde.*

Diese kubische Verwandtschaft hat die besondere Eigenschaft zum Orte der Verbindungsgraden entsprechender Punkte nicht einen Komplex, sondern ein Strahlennetz zu haben; ich bezeichne sie darum in Analogie mit der Kollineation der gleichen Eigenschaft als „*windschiefe kubische Verwandtschaft* oder „*kubische Verwandtschaft mit Achsen.*“

---

[1]) Den hier gegebenen Beweis unter Benutzung der fächerförmigen Erzeugung des Strahlennetzes durch Regelscharen (vgl. Sturm, Liniengeometrie I. Abschn. 92.) verdanke ich Herrn Prof. Sturm.

(36.) Die Leitstrahlen des Netzes (a, b, c, d) seien $p \equiv p_1 \equiv p_2'$ und $q \equiv q_1 \equiv q_2'$. Durch jeden Punkt von p und q geht ein Strahlenbüschel von Netzstrahlen. Ich gehe von einem Punkte P_1 auf p_1 aus und suche auf jedem seiner Netzstrahlen den konjugierten Punkt. Verbinde ich zwei von ihnen durch eine Grade, so ist die ganze Grade dem P_1 konjugiert und die konjugierten Punkte auf allen Netzstrahlen erfüllen eben diese Grade, weil sonst dem P_1 in allen Korrelationen die durch ihn und q gehende Ebene polar wäre, was i. a. nicht der Fall sein kann. Greife ich zwei Korrelationen des Systems heraus und lasse P_1 auf p_1 laufen, so sind die zugehörigen polaren Ebenenbüschel in den beiden Korrelationen projektiv und erzeugen eine Regelschar. Diese Regelschar ist erfüllt von allen den Punkten von p_1 in sämtlichen Korrelationen des Systems konjugierten Graden; sie stützt sich auf q. Es gilt: *Den Punkten von* p *und von* q *als Punkten in* Σ_1 *und* Σ_2 *sind die Strahlen je einer Regelschar konjugiert; die beiden zu* p_1 *und* p_2' *gehörigen Regelscharen heissen* p_2^2 *und* $p_1^{2'}$ *und stützen sich auf* q, *die beiden zu* q_1 *und* q_2' *gehörigen heissen* q_2^2 *und* $q_1^{2'}$ *und stützen sich auf* p.

(37.) Die Regelschar p_2^2 schneidet F^2 in einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art, die ich R_2^4 nenne. Ein Punkt der R_2^4 als Punkt in Σ_2 ist in allen Korrelationen erstens sich selbst und zweitens dem Stützpunkte auf p_1 des von ihm kommenden Netzstrahles konjugiert. Auf allen Netzstrahlen, die sich auf R_2^4 stützen herrscht darum *ausgeartete Projektivität*, sie sind ganz dem Stützpunkte auf R_2^4 konjugiert. Da R_2^4 sowohl q als p zweimal schneidet, nämlich in den Punkten (qF^2) und (pF^2), so bilden diese Strahlen eine Regelfläche vierter Ordnung mit p und q als doppelten Leitgraden; ich will sie mit $\rho_1^4 \equiv \rho_2^4$ bezeichnen.

In derselben Weise erhält man durch $p_1^{2'}$, q_2^2 und $q_1^{2'}$ eine Regelfläche vierter Ordnung von Strahlen mit ausgearteter Projektivität konjugierter Punkte oder nach (17.) von sich selbstkonjugierten Strahlen für alle Korrelationen des Systems. Nach (30.) liegen in jeder Regelschar des Netzes vier sich

selbst konjugierte Strahlen, im ganzen Netze darum genau eine *Regelfläche vierter Ordnung von sich selbst konjugierten Strahlen.* Die vier Regelflächen vierter Ordnung, die ich oben aus $p_1^{2'}$, $p_1^{4'}$ $q_2^{\,2}$, $q_1^{2'}$ abgeleitet habe, sind also identisch. Diese Regelfläche $\rho_1^{\,4} = \rho_2^{\,4}$ schneidet F^2 in zwei Raumkurven vierter Ordnung; die eine ist Ort der singulären Punkte der ausgearteten Projektivitäten in Σ_2, die andere in Σ_1, die eine $R_2^{\,4}$ ist Schnittkurve von F_2 mit $p_2^{\,2}$ und zugleich mit $q_2^{\,2}$, die andere $R_1^{\,4}$ mit $p_1^{\,2'}$ und zugleich mit $q_1^{\,2'}$; beide sind Raumkurven vierter Ordnung erster Art.

(38.) Im Falle der allgemeinen kubischen Verwandtschaft gibt es in jedem Raume eine Hauptkurve R^6 bestehend aus Punkten, deren jedem eine Grade entspricht, und diese Graden im andern Raume bilden eine Regelfläche achter Ordnung[1]). Wir können nun in unserer speziellen Verwandtschaft die Hauptelemente angeben: *Die* R^6 *in* Σ_1 *besteht aus* p_1, q_1 *und* $R_1^{\,4}$; den Punkten von p_1 gehören die Strahlen von $p_2^{\,2}$, den Punkten von q_1 die Strahlen von $q_2^{\,2}$, den Punkten von $R_1^{\,4}$ die Strahlen von $\rho_1^{\,4} \equiv \rho_2^{\,4}$ zu. $p_2^{\,2}$, $q_2^{\,2}$ *und* $\rho_2^{\,4}$ *bilden zusammen die Regelfläche achter Ordnung in* Σ_2. *Die* R^6 *in* Σ_2 *besteht aus* p_2', q_2' *und* $R_2^{\,4}$; den Punkten von p_2' gehören die Strahlen von $p_1^{\,2'}$ den Punkten von q_2' die Strahlen von $q_1^{\,2'}$, und den Punkten von $R_1^{\,4}$ die Strahlen von $\rho_1^{\,4} \equiv \rho_2^{\,4}$ zu. $p_1^{\,2'}$, $q_1^{\,2'}$ *und* $\rho_1^{\,4}$ *bilden zusammen die Regelfläche achter Ordnung in* Σ_1[2]).

(39.) *Die kubische Verwandtschaft mit Achsen führt die* F^2 *Punkt für Punkt in sich selbst über und besitzt eine Regelschar von Graden, welche Involutionen konjugierter Punkte tragen*[3]). Der erste Teil dieses Satzes bedarf keiner Er-

---

[1]) Sturm, Math. Ann. 19. S. 480. Cremona Ann. Mat. II 5. S. 156 ff. Es bestätigt sich auch, dass in jedem Raume die R^6 auf der Regelfläche 8ter Ordnung dreifach ist.

[2]) Somit ist diese kubische Verwandtschaft ein Spezialfall des vierten Beispiels bei Cremona, Math. Ann. 4. S. 218.

[3]) In der allgemeinen kubischen Verwandtschaft gibt es nur 8 sich selbst entsprechende Punkte (Sturm, Math. Ann. 19. S. 481) und 6 Paare involutorisch entsprechender Punkte.

örterung mehr, der zweite geht daraus hervor, dass in jeder Regelschar des Netzes nach (31.) sich zwei Strahlen mit Involutionen konjugierter Punkte befinden; auch schneidet ja der einem Punkte P_1 von p_1 konjugierte Strahl die Polarebene von P_1 nach F^2 in einem Punkte und die Grade nach diesem Punkte hin trägt eine Involution; geht so von jedem Punkte von p und ebenso von q ein solcher Strahl aus, so bilden sie eine Regelschar innerhalb des Netzes.

Sind alle vier gegebenen Punktpaare konjugiert inbezug auf die F^2, so ist die kubische Verwandtschaft durchweg *involutorisch*, das *Polarsystem* von F^2 ist unter den ∞^2 lösenden Korrelationen enthalten.

(40.) In dem Korrelationssystem 2. Stufe sind ∞^1 *Nullkorrelationen* enthalten, nämlich alle die, welche das Netz (p, q) in ihrem Nullkomplex umfassen.

Als *zentrale räumliche Korrelationen* sind alle die Bündel-Korrelationen in dem System enthalten, welche F^2 erzeugen und die vier gegebenen Paare zu Paaren konjugierter Punkte haben. Die Scheitel der Bündel erfüllen die Bestandteile R_1^4 und R_2^4 der Fundamentalkurven in der kubischen Verwandtschaft.

Spezielle achsiale Korrelationen kommen vor mit p und q als Achsen und noch einfach unbestimmter Punktreihenprojektivität.

(41.) Die kubische Verwandtschaft sagt aus, dass die Polarebene eines beliebigen Punktes in dem System von Korrelationen den Bündel um seinen entsprechenden Punkt erfüllen.

Den Punkten einer Ebene α_1 sind die einer F^3 konjugiert. Ein Punkt, der in einer der Korrelationen Pol von α_1 sein soll, muss auf seiner Treffgraden an p, q notwendig deren Spurpunkt in α_1 konjugiert sein, muss also auf dieser F^3 liegen: *Die einer Ebene entsprechende* F^3 *ist zugleich Ort ihrer Pole in dem Korrelationssystem 2ter Stufe.*

Den Punkten einer Graden x_1, sind konjugiert die Punkte einer R^3 in Σ_2. In *einer* Korrelation entsprechen ihnen die Ebenen eines Ebenenbüschels. A_1 sei ein Punkt der Graden,

α_2 die ihm in dieser herausgegriffenen Korrelation entsprechende Ebene. α_2 schneidet die R^3 erstens in dem konjugierten Punkte von A_1 und ausserdem noch in 2 anderen. Jeder dieser beiden Punkte ist einem Punkte der gegebenen Graden in allen Korrelationen konjugiert, also auch in der willkürlich herausgegriffenen Korrelation. Durch jeden dieser beiden Punkte geht daher noch eine Ebene des Ebenenbüschels, folglich ist ihre Verbindungsgrade die Achse des Ebenenbüschels. Daraus folgt: *Die einer Graden eines Raumes in den* ∞^2 *Korrelationen polaren Graden erfüllen die Doppelsekanten-Kongruenz der ihr in der kubischen Verwandtschaft entsprechenden* R^3.

(42.) Sind statt der 4 Punktepaare *zwei Punkte und je eine konjugierte Grade* gegeben, so spezialisiert sich die Verwandtschaft nicht weiter. Sind $A_1;a_2$, $B_1;b_2$ die gegebenen Paare, so werden die Leitgraden des Netzes die Graden $A_1\,B_1$ und die Schnittgrade der Ebenen $A_1\,a_2$, $B_1\,b_2$.

Dagegen tritt eine wesentliche Aenderung ein bei einer *dreifachen Punktbedingung* $A_1;\alpha_2$ *und einem einfachen Paare* $B_1;B_2$. $A_1;\alpha_2$ für sich nämlich bestimmt schon eine zentrale quadratische Verwandtschaft konjugierter Punkte. Wodurch wird sie zu der kubischen Verwandtschaft ergänzt, die wir nach dem vorigen zu erwarten haben? Darüber gibt die Nummer (51) Aufschluss. In der Ebene $A_1\,B_1\,B_2$ ist durch den Schnittkegelschnitt mit F^2, durch A_1 und den Schnitt mit α_2 und durch $B_1;B_2$ bezüglich als Punktkernkurve, Paar polarer Elemente und Paar konjugierter Punkte eine Korrelation festgelegt, welche von allen Raum-Korrelationen des Systems zweiter Stufe eingeschnitten wird.

Die R^3, welche in der kubischen Verwandtschaft einer beliebigen Graden x_1 entsprechen soll, zerfällt also in den Kegelschnitt, der ihr in der zentralen quadratischen Verwandtschaft entspricht, und die Grade, die dem Schnittpunkt von x_1 mit der Ebene $A_1\,B_1\,B_2$ in der ebenen Korrelation zugehört.

Schliesslich erhalte ich wieder eine weniger spezielle kubische Verwandtschaft, wenn ich die vier Punktepaare

durch *ein Paar polarer Graden* $[a_1;a_2] \equiv \nu$ ersetze[1]): a_1, a_2 selbst werden die Leitgraden des Strahlennetzes p, q. Da jedem Punkte von $p_1 \equiv a_1$ die a_2 konjugiert ist, so zerfällt die p_2^2 in das Ebenenpaar von den Schnittpunkten $a_1 F^2$ nach a_2 hin; analog zerfällt $q_1^{2'}$, während $p_1^{2'}$ und q_2^2 allgemeine Regelscharen bleiben.

Sind a_1, a_2 polar bezüglich F^2, so schneiden sie die Ecken des allen Korrelationen gemeinsamen Hauptetraeders in q^2 ein. Darauf kommen wir noch zurück.

c. Fünf Paare konjugierter Punkte.

(43.) *Jetzt liegen fünf Paare konjugierter Punkte*

$$[A_1 : A_2,\ B_1;B_2,\ C;C_2,\ D_1;D_2,\ E_1;E_2] = \mu^5$$

mit den Verbindungsgraden a, b, c, d, e *vor.*

Den lösenden Korrelationen sind jedenfalls nach (35.) die Projektivitäten konjugierter Punkte auf allen Strahlen des Netzes (a, b, c, d) gemein, weil ihnen diejenigen auf vier Strahlen a, b, c, d gemein sind. Verbinde ich den Strahl e mit je zwei Strahlen des Netzes (a, b, c, d) durch eine Regelschar, so erfüllen alle diese Regelscharen das durch die 5 Strahlen a, b, c, d, e bestimmte Gewinde (a, b, c, d, e)[2]). Auf drei Strahlen jeder dieser Regelscharen haben alle Korrelationen des Systems ein und dieselbe Projektivität konjugierter Punkte. Darum folgt aus (29): *Alle Korrelationen, welche die Punktkernfläche* F^2 *und fünf Paare konjugierter Punkte gemeinsam haben, haben die Projektivität konjugierter Punkte auf allen Strahlen eines linearen Komplexes gemein.*

$A_1;A_2$, $B_1;B_2$, $C_1;C_2$, $D_1;D_2$ und $A_1;A_2$, $B_1;B_2$, C_1; C_2, E_1; E_2 legen je eine kubische Verwandtschaft konjugierter Punkte fest. Einem beliebigen Punkte X_1 des Raumes ist daher die Verbindungsgrade seiner in diesen Verwandtschaften entsprechenden Punkte konjugiert, und auf ihr liegen alle

---

[1]) Man kann sich diese Bedingung aus $A_1;a_2$, $B_1;b_2$ entstanden denken, indem man a_2 und b_2 zusammenfallen lässt.

[2]) Vgl. Study Liniengeometrie I. Nr. 93. s. auch (35) Anm.

seine konjugierten Punkte, weil X_1 sonst in allen Korrelationen dieselbe Polarebene haben würde:

Jedem Punkte eines Raumes ist eine Grade im anderen konjugiert.

(44.) Läuft X_1 auf einer Graden x_1, so durchlaufen die in den beiden kubischen Verwandtschaften entsprechenden Punkte je eine R^3. Lasse ich auf den beiden R^3 zwei solche Punkte entsprechend sein, die ein und demselben Punkt X_1 konjugiert sind, so haben die beiden R^3 vier Punkte als sich selbst entsprechende gemein. Es sind das die Punkte $(x_1 F^2)$ und die Punkte auf den Graden der Regelschar (abc), welche x_1 schneiden; denn das sind gemeinsame Strahlen der beiden Netze (a, b, c, d) und (a, b, c, e) mit gemeinsamer Projektivität. Der Ort der Verbindungsgraden entsprechender Punkte ist darum nicht eine Regelfläche 6ter Ordnung, sondern eine Regelschar:

Den Punkten einer Graden eines Raumes sind die Strahlen einer Regelschar im anderen konjugiert.

Durchläuft aber X_1 eine Grade y_1, welche selbst einem Punkte Y_2 konjugiert ist, so haben die beiden R^3 ausser jenen vier Punkten noch den Y_2 gemein, der aber in der einen und anderen kubischen Verwandtschaft zwei verschiedenen Punkten X_1 zugehört. Durch diesen Punkt gehen daher zwei Grade der erzeugten Regelschar, sie ist ein Kegel.

Den Punkten einer Graden eines Raumes, die selbst einem Punkte des anderen konjugiert ist, sind die Graden eines Kegels mit diesem Punkt als Scheitel konjugiert.

Durch Y_2 kann ausserhalb dieses Kegels keine Grade mehr gehen, welche einem Punkte von Σ_1 konjugiert wäre, denn jeder solche Punkt muss auf y_1 liegen. Y_2 selbst ist dabei ganz willkürlich in Σ_2. Darum gilt: *Die den Punkten eines Raumes konjugierten Strahlen bilden im andern einen Komplex zweiten Grades.*

(45.) In jeder der beiden kubischen Verwandtschaften gibt es nun auf F^2 eine zu Σ_1 gehörige R_1^4 erster Art, deren jedem Punkte ein ganzer Strahl durch ihn konjugiert ist. Beide R_1^4 haben acht Punkte gemein. 4 Punkten

darunter ist in beiden Verwandschaften dieselbe Grade konjugiert. Die den beiden Netzen zugehörige Regelschar (abc) trägt nämlich 4 Strahlen mit ausgearteter Projektivität. Deren singuläre Punkte in Σ_1 sind vier der acht Punkte, und ihnen entspricht beidemal jener Strahl der Regelschar (abc). Den vier anderen Punkten aber sind in den beiden kubischen Verwandtschaften zwei verschiedene Strahlen durch sie entsprechend. Darum ist ihnen jetzt die ganze Verbindungsebene konjugiert. Es gibt also in Σ_1 genau ein der F^2 eingeschriebenes Tetraeder, welchem in allen Korrelationen ein anderes polar ist. Den Eckpunkten dieses Tetraeders in Σ_2 sind dann umgekehrt die Ebenen des ersten polar, und, da in Σ_2 Punkte, denen eine ganze Ebene polar ist, auch nur auf die eben in Σ_1 nachgewiesene Weise entstehen können, so gilt:

Allen ∞^1 Korrelationen ist ein Paar polarer Tetraeder gemeinsam. Dieselben sind der F^2 ein- und sich gegenseitig zugleich um- und eingeschrieben.

Die beiden Tetraeder sind polar bezüglich des linearen Komplexes, dessen Strahlen feste Projektivität konjugierter Punkte tragen.

(46.) Da nun jede Grade eines Raumes jede Ebene dieses Tetraeders schneidet und dem Schnittpunkte ein Eckpunkt des anderen Tetraeders konjugiert ist, so ist die ihr konjugierte Regelschar dem Tetraeder des zweiten Raumes umschrieben. Eine beliebige Grade y_2 des Komplexes zweiten Grades gehört ∞^2 Regelscharen dieser Art an, nämlich so vielen, als Graden durch den Punkt Y_1 gehen, dessen konjugierte Grade sie ist. Die Strahlen dieser Regelscharen senden nach den Ecken des Tretraeders in Σ_2 Ebenenwürfe von demselben Doppelverhältnis, wie die Grade y_2. Mit den Graden dieser Regelscharen ist aber auch der ganze Komplex zweiten Grades erschöpft, denn mit den Punkten der Graden durch y_2 ist der ganze Raum Σ_2 erschöpft. Daraus folgt: *Die Komplexe zweiten Grades von Strahlen eines Raumes, die einem Punkte im anderen konjugiert sind, sind tetraedral.*

Ihnen liegen die ausgezeichneten Tetraeder der beiden Räume zu Grunde.

(47.) Die einem Punkte eines Raumes in den ∞^1 Korrelationen polaren Ebenen bilden das Ebenenbüschel um seine konjugierte Grade.

Die einer Graden polaren Graden müssen alle ihren Punkten konjugierten Graden schneiden und *bilden daher die verbundene Regelschar* zu der Schar dieser konjugierten Graden.

Die Pole einer Ebene ξ_1 müssen beiden der ξ_1 in den kubischen Verwandtschaften entsprechenden F^3 angehören. Von der Schnitt-R^9 dieser beiden sondert sich der Kegelschnitt (ξ_1 F^2) und die R^4 ab, welche beide ausser den Leitgraden der Strahlennetze der Verwandtschaften noch in die Trägerfläche der Regelschar (abc) einschneiden. *Es bleibt als Ort der möglichen Pole* X_2 *eine* R^3, welche die Ecken des ausgezeichneten Tetraeders in Σ_2 enthält. Ihre Doppelsekantenkongruenz ist der Ort der den Punkten der Ebene konjugierten Graden. Dieselbe R^3 ist auch der Ort der Punkte, welche den Strahlen des tetraedralen Komplexes in Σ_1, die in ξ_1 liegen, konjugiert sind. Diese R^3 sind die Ordnungskurven des tetraedralen Komplexes[1]).

(48.) Innerhalb des linearen Komplexes von Strahlen mit fester Projektivität konjugierter Punkte gibt es eine *lineare Kongruenz solcher Strahlen mit einer Involution konjugierter Punkte.* Denn in jedem Strahlenbüschel des Komplexes gibt es einen, weil die dem Scheitel konjugierte Grade die Polarebene des Punktes nach F^2 in einem Punkte schneidet.

Sind alle fünf Paare konjugierter Punkte, welche gegeben sind, konjugiert auch bezüglich der F^2, so ist die Projektivität auf allen Strahlen des linearen Komplexes eine Involution. Der lineare Komplex ist für alle Korrelationen der Komplex K^1 (18). Die beiden ausgezeichneten Tetraeder in Σ_1 und Σ_2 sind zusammengefallen und bilden das Haupt-

[1]) Reye, Geom. d. L. III. Erster Vortrag.

tetraeder in allen Korrelationen. Die einem Punkte in dem einen und andern Sinne konjugierten Graden sind ebenfalls zusammengefallen. Alle diese Graden erfüllen den gemeinsamen tetraedralen Komplex der *Wechselstrahlen* W^2 in den ∞^1 Korrelationen. In diesem Falle ist auch der *Polarraum* von F^2 in dem System enthalten.

(49.) In jedem Falle gehört dem System das von den Strahlen mit fester Projektivität konjugierter Punkte gebildete *Nullsystem* an.

Als *zentrale Korrelationen* gehören dem System die Bündel-Korrelationen an, welche F^2 erzeugen und die fünf gegebenen Punktpaare zu konjugierten Punkten haben. Es gibt 4 Bündel-Korrelationen. Die vier Scheitelpaare sind Eckenpaare der beiden ausgezeichneten Tetraeder, und zwar so herausgegriffen, dass keine der entsprechenden Ebene der anderen angehört. Denn das ist die einzige Lage der Scheitel, bei der die beiden Tetraeder in zentraler Korrelation in einander übergehen können.

Achsiale Korrelationen sind in dem System nicht mehr enthalten.

(50.) Die Verhältnisse nehmen besondere Gestalt an, wenn statt 5 Paaren konjugierter Punkte *eine dreifache und eine doppelte Punktbedingung gegeben ist* $[A_1;\alpha_2,\ B_1;b_2] = \mu\mu$.

$A_1;\alpha_2$ legt auf jeder Graden durch A_1 eine Projektivität fest, also auch auf $A_1\ B_1$. Darum ist dem B_1 ein bestimmter Punkt auf $B_1\ A_1$ konjugiert, und damit seine Polarebene β_2 bestimmt. Zugleich sind auch α_2' und β_1', die dem $A_1 \equiv A_2'$ und $B_1 \equiv B_2'$ im anderen Sinne entsprechenden Ebenen, bekannt und damit auch beide Polarebenen jedes Punktes von $A_1\ B_1$, die ja bezw. dem Ebenenbüschel $(\alpha_2,\ \beta_2)$, und dem $(\alpha_1',\ \beta_1')$ angehören. Der lineare Komplex von Strahlen mit fester Projektivität ist das Gebüsche mit der Achse $A_1\ B_1$. Die Ecken des einen ausgezeichneten Tetraeders werden von $A_1\ B_1$ und $\alpha_1'\ \beta_1'$ die des anderen von $A_1\ B_1 \equiv A_2'\ B_2'$ und $\alpha_2\ \beta_2$ in F^2 eingeschnitten. Der tetraedrale Komplex der Strahlen, die je einem Punkte konjugiert sind, zerfällt in beiden Räumen.

Der eigentliche Ort dieser Strahlen ist in beiden Räumen das Gebüsche mit der Achse $A_1 B_1$, dazu kommt in Σ_1 noch dasjenige mit der Achse $\alpha_1' \beta_1'$, in Σ_2 das mit der Achse $\alpha_2 \beta_2$, deren Strahlen sind aber nur zu den Punkten von $A_1 B_1$ in dem einen und anderen Sinne konjugiert.

§ 4. Konstruktionen und Anzahlbestimmungen.

a. Lineare Aufgaben.

(51.) Ich schalte hier eine Betrachtung aus dem analogen Problem im Gebiete der *ebnen Korrelation* ein. Wie in der räumlichen Korrelation ist jede Grade mit einer Projektivität konjugierter Punkte erfüllt, deren Koinzidenzpunkte die Schnittpunkte mit dem *Punktkernkegelschnitt* sind.

Sind die Punktkernkurve K^2 und zwei Paare polarer Elemente $A_1;a_2$, $B_1;b_2$ gegeben, so ist i. A. keine Korrelation möglich, sondern nur, wenn auf $A_1 B_1$ eine Projektivität liegt, in welcher die Schnittpunkte mit K^2 Koinzidenzpunkte, A_1 und der mit a_2, B_1 und der mit b_2 entsprechende Punkte sind. In diesem Falle erhalte ich die einem Punkte X_1 polare Grade x_2, wie folgt: $A_1;a_2$ und $B_1;b_2$ legen mit K^2 je eine zentrale quadratische Verwandtschaft fest mit A_1 bzw. B_1 als Zentrum (14.). x_2 ist die Verbindungsgrade der Punkte $X_2{}^A$ und $X_2{}^B$, welche dem X_1 in diesen beiden quadratischen Verwandtschaften entsprechen. Zum Nachweis der Ein-eindeutigkeit der so entstehenden Verwandtschaft zeige ich, dass jede Grade x_2 in dieser Weise nur einem Punkte X_1 zugehört. Die beiden ihr in den quadratischen Verwandtschaften entsprechenden Kegelschnitte haben die Punkte $(x_2 K^2)$ und den durch die gemeinsame Projektivität auf $A_1 B_1$ bestimmten Punkt gemein. Der vierte Schnittpunkt ist allein ganz frei in der Ebene; er ist der einzig mögliche Punkt X_1. Läuft X_1 auf einer Graden x_1, so beschreiben $X_2{}^A$ und $X_2{}^B$ zwei Kegelschnitte in Projektivität; diese haben wieder die Punkte $(x_1 K^2)$ und einen Punkt auf $A_1 B_1$ gemein, und zwar als sich selbst entsprechende Punkte in der Projektivität. Darum beschreiben die Verbindungs-

graden entsprechender Punkte, d. s. die x_2, das Strahlenbüschel um den vierten Schnittpunkt. Damit ist auch die Linearität nachgewiesen und zugleich erkannt, dass ich zu einem Punkt X_2 die Grade x_1 in derselben Weise erhalte, wie zu einem X_1 die x_2. Das letzte war schon deshalb zu erwarten, weil durch $A_1;a_2$ zugleich die dem $A_1 \equiv A_2'$ im andern Sinne polare Grade a_1' mitgegeben ist, nämlich die ihm in der zentralen quadratischen Verwandtschaft im andern Sinne entsprechende Grade, d. i. die Verbindungsgrade der zwei weiteren Schnittpunkte von K^2 mit den Strahlen von $A_1 \equiv A_2'$ nach den Punkten $(a_2 K^2)$.

Durch K^2, $A_1;a_2$, $B_1;B_2$ ist eine Korrelation eindeutig bestimmt. Ich führe die Konstruktion auf die vorige zurück, indem ich den Verbindungsstrahl von B_2 mit dem Punkte $B_2{}^A$, der dem B_1 in der durch $A_1;a_2$ bestimmten zentralen quadratischen Verwandtschaft entspricht als b_2 nehme. Desgleichen ist durch K^2, $A_1;A_2$, $B_1;B_2$, $C_1;C_2$ eine Korrelation eindeutig bestimmt. $A_1;A_2$ und $B_1;B_2$ legen auf ihren Verbindungsgraden je eine Projektivität konjugierter Punkte fest. Dem Schnittpunkt D_1 gehören in diesen die Punkte $D_2{}^A$, $D_2{}^B$ zu. Ihre Verbindungsgrade muss die Polare d_2 von D_1 sein. Damit ist auch diese Konstruktion auf die vorangegangene zurückgeführt.

Alle anderen Bedingungsgruppen, die zu K^2 hinzutreten können, liefern Aufgaben höheren Grades; wir übergehen sie hier, weil sie zu dem räumlichen Problem nicht notwendig sind.

(52.) Zurück zur räumlichen Korrelation. *Es gibt keine Korrelation, welche* F^2 *zur Punktkernfläche hat und zwei beliebig vorgegebene Paare polarer Elemente* $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$ *enthält.*

Denn auf der Graden $A_1 B_1$ sind A_1 und der Schnittpunkt mit α_2, B_1 und der mit β_2 im allgemeinen nicht Paare einer Projektivität, welche die Schnittpunkte mit F^2 zu Koinzidenzelementen hat, was bei einer Korrelation der Fall sein müsste[1]). Erfüllen aber $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$ eine solche

[1]) Die speziellen achsialen Korrelationen, welche $A_1 B_1$ zur Achse haben, und deren Punktreihenprojektivität durch A_1, B_1 und die

Projektivität auf $A_1 B_1$, so gibt es, wie aus (50.) folgt, gleich unendlich viele Korrelationen.

(53.) *Sind drei Paare polarer Elemente* A_1, α_2, $B_1;\beta_2$, $C_1;\gamma_2$ *derart gegeben, dass auf* $A_1 B_1$ A_1 *und der Schnittpunkt mit* α_2, B_1 *und der mit* β_2, *auf* $B_1 C_1$ B_1 *und der Schnittpunkt mit* β_2, C_1 *und der mit* γ_2, *auf* $C_1 A_1$ C_1 *und der Schnittpunkt mit* γ_2, A_1 *und der mit* α_2 *Paare je einer Projektivität bilden, deren Koinzidenzelemente die Schnittpunkte mit* F^2 *sind, so ist damit stets genau eine Korrelation bestimmt, wofern* A_1, B_1, C_1 *nicht in einer Graden liegen oder* α_2, β_2, γ_2 *nicht durch* A_1, B_1, C_1 *gehen.* $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$, $C_1;\gamma_2$ bestimmen je eine zentrale quadratische Verwandtschaft (14.). Ich lasse einem beliebigen Punkte X_1 die Verbindungsebene ξ_2 der drei Punkte $X_2{}^A$, $X_2{}^B$, $X_2{}^C$ entsprechen, die ihm in diesen Verwandtschaften entsprechend sind, so entsteht die gewünschte Korrelation. Zunächst will ich zeigen, dass eine beliebige Ebene ξ_2 in Σ_2 nur einem Punkte X_1 in Σ_1 in dieser Weise zugehören kann, dass die Verwandtschaft also ein-eindeutig ist:

Der ξ_2 entspricht in jeder der drei zentralen quadratischen Verwandtschaften eine Fläche zweiten Grades. Diese drei Flächen haben ausser dem Kegelschnitt ($\xi_2 F^2$) noch zwei Punkte gemein. In der Ebene $A_1 B_1 C_1$ bestimmen die drei von den räumlichen eingeschnittenen ebenen zentralen quadratischen Verwandtschaften eine Korrelation nach (51.). Der Schnittgraden von $A_1 B_1 C_1$ mit ξ_2 entspricht in dieser ein Punkt. Er muss einer der beiden eben gefundenen Punkte sein. Da er fest an die Ebene $A_1 B_1 C_1$ gebunden ist, kommt er hier nicht in Betracht. Es bleibt also nur ein einziger frei im Raume liegender Punkt X_1 übrig, welcher die Eigenschaft hat, dass seine in den drei Verwandtschaften zugehörigen Punkte auf ξ_2 liegen. Er ist der einzige, dem ξ_2 in der oben angegebenen Weise zugeordnet ist.

Schnittpunkte mit α_2, β_2 noch unbestimmt gelassen ist, könnten als Lösungen aufgefasst werden, doch übergehe ich, wie schon gesagt, diese uninteressanten Lösungen, die nicht in dem Kontinuum der allgemeinen Korrelationen enthalten sind.

Ich weise ferner nach: Läuft X_1 auf einer Graden x_1, so beschreibt seine zugeordnete Ebene ξ_2 ein Ebenenbüschel: Die Punkte $X_2{}^A$, $X_2{}^B$, $X_2{}^C$ durchlaufen je einen Kegelschnitt $x_2{}^A$, $x_2{}^B$, $x_2{}^C$. Alle drei sind projektiv bezogen, wenn ich drei Punkte entsprechend sein lasse, die einem und demselben Punkte X_1 zugehören, dabei sind ihnen die Punkte $(x_1 F^2)$ als sich selbst entsprechende Punkte gemein. Der Ort der Verbindungsgraden entsprechender Punkte von $x_2{}^A$ und $x_2{}^B$, ebenso derer von $x_2{}^A$ und $x_2{}^C$ ist daher eine Regelschar. Beide Regelscharen durchschneiden sich in dem Kegelschnitt $x_2{}^A$ und derjenigen Graden der Ebene $A_1 B_1 C_1$, welche in der ebenen Korrelation dem Spurpunkt von x_1 entspricht, darum ausserdem noch in einer Graden, die den beiden Leitscharen angehört. Jede Ebene durch diese letzte Grade trägt zwei sich auf $x_2{}^A$ schneidende Strahlen der beiden Regelscharen und verbindet darum drei entsprechende Punkte der drei Kegelschnitte. Das Ebenenbüschel um sie ist der Ort der Ebenen ξ_2. *Hiermit ist die Verwandtschaft als Korrelation erkannt.*

(54.) $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$, $C_1;\gamma_2$ sind in ihr polare Elemente. Für einen beliebigen Punkt von Ebene $A_1 B_1 C_1$ und F^2 gibt die Konstruktion nicht direkt die polare Ebene, sondern nur eine konjugierte Grade bezw. einen konjugierten Punkt — ihn selbst —, während die eindeutige Bestimmung der Ebene erst durch das Kontinuum der Korrelation erfolgt. Jedenfalls sind die Punkte der F^2 sich selbst konjugiert.

Auf analoge Weise wie zu einem Punkte X_1, erhält man zu einem Punkte X_2 die Polarebene. Liegen die A_1, B_1, C_1 in einer Graden, so ist nur dann eine Korrelation möglich, wenn α_2, β_2, γ_2 durch eine Grade gehen und dann gibt es gleich ∞^1 Korrelationen. Liegen A_1, B_1, C_1 in ihren Polarebenen α_2, β_2, γ_2, so ist nur dann eine Korrelation möglich, wenn α_2, β_2, γ_2 sich in der Ebene $A_1 B_1 C_1$ schneiden — die Nullkorrelation — oder, wenn α_2, β_2, γ_2 einem Ebenenbüschel angehören — die spezielle achsiale Korrelation Ψ mit zusammengefallenen Achsen und identischen Ebenenbüscheln.

Die ganze Betrachtung, auch die lineare Konstruktion der Polarebenen eines Punktes bleibt reell, wenn F^2 imaginär, durch ein reelles Polarsystem repräsentiert ist (6.).

Wir werden nun in den folgenden Fragen die lösende Korrelation als bekannt ansehen, wenn wir drei Paare polarer Elemente $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$, $C_1;\gamma_2$ nachweisen können, welche auf den Graden $A_1\ B_1$, $B_1\ C_1$, $C_1\ A_1$ eine Projektivität mit den Schnittpunkten der F^2 als Koinzidenzelementen hervorrufen.

(55.) *Gegeben ist* $[A_1;\alpha_2,\ B_1;b_2,\ C_1;C_2] = \overline{=}\ \overline{\mu}\ \mu$. Ich konstruiere auf $A_1\ B_1$ den Punkt $B_2{}^A$, sodass

$$X\ Y\ A_1\ B_1 \overline{\wedge} X\ Y\ \alpha_2\ B_2{}^A$$

ist, wobei X Y die Schnittpunkte mit F^2 bezeichnen, lege die Ebene $b_2\ B_2{}^A = \beta_2$, konstruiere weiter auf $C_1\ A_1$ und $C_1\ B_1$ die Punkte $C_2{}^A$, $C_2{}^B$, so dass $X\ Y\ A_1\ C_1 \overline{\wedge} X\ Y\ \alpha_2\ C_2{}^A$, $X\ Y\ B_1\ C_1 \overline{\wedge} X\ Y\ \beta_2\ C_2{}^B$ ist, wo ich wieder die Schnittpunkte der Graden mit F^2 wie immer durch X Y bezeichne, und lege die Ebene $C_2\ C_2{}^A\ C_2{}^B = \gamma_2$. $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$, $C_1;\gamma_2$ sind drei Paare polarer Elemente. Also: . . . . . $\overline{=}\ \overline{\mu}\ \mu = 1$.

(56.) *Gegeben ist* $[A_1;\alpha_2,\ B_1;B_2,\ C_1;C_2,\ D_1;D_2] = \overline{=}\ \mu^3$. Ich lege Ebene $A_1\ B_1\ B_2$ und Ebene $A_1\ C_1\ C_2$. In jeder ist durch A_1 und die Schnittgrade mit α_2 und $B_1;B_2$ bezw. $C_1;C_2$ eine ebene Korrelation festgelegt (51.). Beide haben die Projektivität conjugierter Punkte auf der Schnittgraden gemein. Suche ich die beiden polaren Graden eines Punktes E_1 dieser Schnittgraden in den beiden ebenen Korrelationen, so schneiden sich diese, ihre Ebene heisse ε_2. Suche ich dann auf $D_1\ A_1$ und $D_1\ E_1$ die Punkte $D_2{}^A$, $D_2{}^E$, welche befriedigen: $X\ Y\ A_1\ D_1 \overline{\wedge} X\ Y\ \alpha_2\ D_2{}^A$ bezw. $X\ Y\ E_1\ D_1 \overline{\wedge} X\ Y\ \varepsilon_2\ D_2{}^E$, und verbinde $D_2\ D_2{}^A\ D_2{}^E$ durch eine Ebene δ_2, so sind $A_1;\alpha_2$, $E_1;\varepsilon_2$, $D_1;\delta_2$ drei Paar polarer Elemente. Also: . . . . . $\overline{\mu}\ \mu^3 = 1$.

(57.) *Gegeben sei* $[A_1;a_2,\ B_1;b_2,\ C_1;c_2] = \overline{\mu}^3$.

Ich lege die Ebene $A_1\ B_1\ C_1$, ihre Schnittpunkte mit a_2, b_2, c_2 seien A_2, B_2, C_2. In dieser Ebene ist durch die Paare $A_1;A_2$, $B_1;B_2$, $C_1;C_2$ und den Schnittkegelschnitt mit F^2

als Punktkernkurve eine ebene Korrelation eindeutig bestimmt (51.). Ich konstruiere die den Punkten A_1, B_1, C_1 polaren Graden a_2', b_2', c_2', lege die Ebenen $a_2\ a_2' = \alpha_2$, $b_2\ b_2' = \beta_2$, $c_2\ c_2' = \gamma_2$, so sind $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$, $C_1;\gamma_2$ drei Paare polarer Elemente. Also: . . . . . $\mu^3 = 1$.

Wir werden die nächsten Aufgaben auf diese zurückführen. Vorher sei noch bemerkt, dass die drei Punkt-Graden-Paare die Korrelation natürlich nur dann eindeutig festlegen, wenn sie vollständig unabhängig sind d. h. eines nicht in dem durch die beiden anderen bestimmten System konjugierter Elemente im Raume ganz oder auch nur mit einem Punktepaar enthalten ist.

(58.) *Gegeben sei* $[A_1;a_2, B_1;b_2, C_1;C_2, D_1;D_2] = \mu^2\ \mu^2$. Ich schneide $C_1\ C_2$ und $D_1\ D_2$ mit der Ebene $(A_1\ a_2)$ in E_1 und F_1, suche die Punkte $E_2{}^A$, $F_2{}^A$, welche den E_1 und F_1 in der durch $A_1\ a_2$ bestimmten zentralen quadratischen Verwandschaft entsprechen, und die $E_2{}^C$, $F_2{}^D$, die den E_1, F_1 auf $C_1\ C_2$ bzw. $D_1\ D_2$ in den durch diese Paare festgelegten Projektivitäten konjugierter Punkte entsprechen. Ziehe ich dann $E_2{}^C\ E_2{}^A = e_2$, $F_2{}^C\ F_2{}^A = f_2$, so bestimmen $B_1;b_2$, $E_1;e_1$, $F_1;f_2$ die räumliche Korrelation wie oben. . . . . $\mu^2\ \mu^2 = 1$.

(59) *Gegeben sei* $[A_1;a_2, B_1;B_2, C_1;C_2, D_1;D_2, E_1;E_2] = \mu\ \mu^4$. Ich bilde wie eben für die Schnittpunkte F_1, G_1 der Graden B_1B_2, C_1C_2 mit der Ebene (A_1a_2) die konjugierten Graden f_2, g_2. Dann in derselben Weise für die Schnittpunkte H_1, J_1 der Graden D_1D_2, E_1E_2 mit der Ebene (F_1f_2) die konjugierten Graden h_2, i_2. Alsdann sind $G_1;g_2$, $H_1;h_2$, $I_1;i_2$ drei unabhängige Paare von Punkten und konjugierten Graden. . . . . $\mu\ \mu^4 = 1$.

(60.) *Gegeben sei*

$[A_1;A_2, B_1;B_2, C_1;C_2, D_1;D_2, E_1;E_2, F_1;F_2] = \mu^6$.

Dabei müssen wir — was bisher durch Wahl besonders geeigneter Elemente vermeidbar war — auf die (30.) bis (50.) abgeleiteten Systeme konstruktiv zurückgehen.

$A_1;A_2$, $B_1;B_2$, $C_1;C_2$, $D_1;D_2$ bestimmen, wie folgt, eine kubische Verwandschaft konjugierter Punkte. Ich konstruiere

die beiden Treffgraden p, q an die vier Verbindungsgraden. Es gibt genau eine Regelschar p_2^2, welche sich auf q stützt, die beiden Punkte (p F^2) enthält, ferner die vier Punkte, die den Schnittpunkten von p mit den vier Graden konjugiert sind in den durch die Paare festgelegten Projektivitäten. Dann ordne ich jedem Punkte P_1 von p die Grade zu, welche diese Regelschar in die Ebene $P_1 q$ einschneidet. Damit ist auf jedem Strahl des Netzes (p, q) die Projektivität konjugierter Punkte bekannt.

Ebenso haben B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2 und C_1C_2, D_1D_2, E_1E_2, F_1F_2 je zwei Treffgrade, und ebenso bestimmt man die Projektivitäten konjugierter Punkte auf den Strahlen der Netze, die diese beiden Paare zu Leitgraden haben. Schliesslich findet man die Polarebene ζ_2 eines beliebigen Punktes Z_1, indem man seine drei konjugierten Punkte auf den durch ihn gehenden Strahlen der drei Netze konstruiert und diese durch eine Ebene verbindet. . . . . $\mu^6 = 1$.

(61.) Noch folgende zwei Aufgaben sind linear ausführbar;

Gegeben sei $[a_1;a_2,\ B_1;b_2] = \overline{\overline{\nu\ \mu}}$, also ein Paar polarer Graden und eine doppelte Punktbedingung.

Ich lege zwei Punkte A_1, A_1' auf a_1, so ist die Aufgabe auf $A_1;a_2$, $A_1';a_2$, $B_1;b_2$ zurückgeführt, was bereits erledigt ist.

Die Polarebene von B_1 konstruiert man am schnellsten so: Man legt die Treffgrade von B_1 an a_1, a_2, sie wird von $a_1;a_2$ in einem Paar konjugierter Punkte geschnitten, welches die Projektivität auf ihr festlegt, darin entspricht dem B_1 Punkt B_2, (B_2 b_2) ist die Polarebene. . . . . $\overline{\overline{\nu\ \mu}} = 1$.

(62.) *Gegeben sei* $[a_1;a_2,\ B_1;B_2,\ C_1;C_2] = \overline{\overline{\nu\ \mu^2}}$.

Ich suche wie eben zu B_1 und C_1 den konjugierten Punkt auf der Treffgraden an a_1, a_2 und verbinde ihn mit B_2 bezw. C_2 durch b_2 bezw. c_2. Ist dann A_1 ein beliebiger Punkt von a_1, so sind $A_1;a_2$, $B_1;b_2$, $C_1;c_2$ unabhängige konjugierte Punkte und Graden, und die Aufgabe ist auf eine frühere zurückgeführt. . . . . $\overline{\overline{\nu\ \mu}} = 1$.

b. Aufgaben höheren Grades.

(63.) In (41.) (42.) (47.) (50.) wurden die Oerter der einem Punkt, einer Graden, einer Ebene polaren Elemente in

Systemen zweiter bezw. erster Stufe, die durch 4 Paare bzw. 5 Paare konjugierten Punkte bestimmt werden, festgestellt. Aus ihnen folgen, wenn man beachtet, dass nach Festnahme eines der möglichen polaren Elemente, sich leicht drei Paare polarer Punkte und Ebenen finden lassen, direkt die Signaturen:

$$\begin{array}{llll} \mu^4\,\bar{\rho}_1 = 3, & \mu^4\,\bar{\rho}_2 = 3, & \mu^4\,\bar{\nu}_1 = 4, & \mu^4\,\bar{\nu}_2 = 4, \\ \bar{\mu}\,\rho_1 = 3, & \bar{\nu}\,\bar{\rho}_2 = 3, & \bar{\nu}\,\bar{\nu}_1 = 4, & \bar{\nu}\,\nu_2 = 4, \\ \bar{\mu}\,\mu^2\,\bar{\rho}_1 = 3, & \bar{\mu}\,\mu^2\,\bar{\rho}_2 = 3, & \bar{\mu}\,\mu^2\,\bar{\nu}_1 = 4, & \bar{\mu}\,\mu^2\bar{\nu}_2 = 4, \\ \bar{\mu^2}\,\bar{\rho}_1 = 3, & \bar{\mu^2}\,\rho_2 = 3, & \bar{\mu^2}\,\nu_1 = 4, & \bar{\mu^2}\,\bar{\nu}_2 = 4. \end{array}$$

$$\mu^5\,\rho = 3, \quad \mu^5\,\nu = 2,$$

$$\mu\,\mu^3\,\rho = 3, \quad \bar{\mu}\,\mu^3\,\nu = 2,$$

$$\mu^2\,\mu\,\rho = 3, \quad \bar{\mu^2}\,\mu\,\nu = 2,$$

$$\bar{\nu}\,\mu\,\rho = 3, \quad \bar{\nu}\,\mu\,\nu = 2.$$

(64.) Besondere Behandlung erfordern und verdienen die Gruppen, die eine dreifache Punktbedingung enthalten. $[A_1;\alpha_2,\ B_1;b_2,\ \gamma_1;\gamma_2] = \bar{\mu}\,\mu\,\rho$.

β_2 ist durch b_2 und den konjugierten Punkt von B_1 auf $A_1\,B_1$ bestimmt. Dem γ_2 ist in den durch $A_1;\alpha_2$ bezw. $B_1;\beta_2$ festgelegten zentralen quadratischen Verwandschaften je eine Fläche zweiter Ordnung zugehörig. Beide schneiden sich ausser in dem Schnittkegelschnitt $(\gamma_2\ F^2)$ noch in einem Kegelschnitt. Jeden der beiden Schnittpunkte dieses Kegelschnitts mit γ_1 kann ich als Pol C_1 von γ_2 nehmen und habe so zweimal drei Paare polarer Punkte und Ebenen, also zwei lösende Korrelationen. . . . . $\bar{\bar{\mu}}\,\bar{\mu}\,\rho = 2$.

(65.) $[A_1;\alpha_2,\ B_1;B_2,\ \gamma_1;c_2] = \bar{\mu}\,\mu\,\bar{\rho}_1$.

Dem γ_1 entspricht in der durch $A_1;\alpha_2$ festgelegten zentralen quadratischen Verwandtschaft eine Fläche zweiter Ordnung. Sie schneidet c_2 in 2 Punkten. Nur, wenn ich einen von diesen beiden als Pol C_2 von γ_1 nehme, ist auf $A_1\ C_2$ die nötige Projektivität erfüllt. Zu B_1 wird leicht der konjugierte auf $B_1\ A_1$ und der auf $B_1\ C_2$ gefunden. Ihre Verbindungsebene mit B_2 nenne ich β_2, so habe ich

wieder zweimal drei Paare polarer Punkte und Ebenen und damit zwei Korrelationen. . . . . $\bar{\bar{\mu}}\,\mu\,\bar{\rho}_1 = 2.$

Dasselbe gilt bei $[A_1{:}\alpha_2,\ B_1;B_2,\ c_1;\gamma_2] = \bar{\bar{\mu}}\,\mu\,\rho_2$ natürlich.

(66.) $[A_1;\alpha_2,\ \beta_1;b_2,\ \gamma_1;\gamma_2] = \bar{\bar{\mu}}\,\rho_1\,\rho.$

Dem β_1 entspricht in der durch $A_1;\alpha_2$ bestimmten zentralen quadratischen Verwandtschaft eine Fläche zweiter Ordnung, diese schneidet b_2 in zwei Punkten, das sind die einzigen beiden Punkte, welche als Pole B_2 von β_1 aufgefasst auf $A_1\ B_2$ die durch $A_1;\alpha_2$ festgelegte Projektivität konjugierter Punkte befriedigen. Nehme ich einen als B_2 und bilde die beiden Flächen zweiter Ordnung, welche der Ebene γ_2 in den zentralen quadratischen Verwandtschaften, die durch $A_1;\alpha_2$ bezw. $\beta_1;B_2$ bestimmt werden, entsprechen, so schneiden sie sich ausser in dem Kegelschnitt $(\gamma_2\ F^2)$ noch in einem Kegelschnitt. Dieser schneidet endlich γ_1 in den einzigen beiden Punkten, die als Pole C_1 von γ_2 möglich sind; man erhält so auf vier Weisen drei Paare polarer Punkte und Ebenen, also vier Korrelationen. $\bar{\bar{\mu}}\,\rho_1\,\rho = 4.$

(67.) Bestimmen wir noch geometrisch die Anzahlen aller Bedingungsgruppen, welche aus lauter mehrfachen Bedingungen bestehen, soweit sie nicht schon erledigt sind, und soweit sie nicht durch die Formeln von (72) auf andere reduziert werden.

$[A_1;a_2,\ \beta_1;b_2,\ \gamma_1;c_2] = \bar{\mu}\ \bar{\rho}_1{}^2.$

Ich lasse B_2, den Pol von β_1, auf b_2, C_2 denjenigen von γ_1, auf c_2 laufen. Nehme ich einen Punkt B_2 fest, so ist die Projektivität konjugierter Punkte auf allen Strahlen durch B_2 bestimmt, es gibt genau zwei Punkte C_2 auf c_2, die als Pole von γ_1 diese Projektivität erfüllen. b_2 und c_2 stehen in einer Korrespondenz [2,2], wenn ich zwei Punkte entsprechend sein lasse, welche als Pole von β_1 und γ_1 in einer Korrelation verträglich sind.

Durch jeden Punkt B_2 und C_2 ist auf $A_1\ B_2$, bezw. $A_1\ C_2$ dem A_1 ein Punkt konjugiert $A_2{}^B$ bezw. $A_2{}^C$. Der Ort der Punkte $A_2{}^B$ und $A_2{}^C$ ist je ein Kegelschnitt. Denn jeder Punkt B_2 von b_2 bestimmt mit β_2 und F^2 eine zentrale quadratische Verwandtschaft, deren Zentrum er ist. Läuft B_2

auf b_2, während F^2 und β_2 fest bleiben, so beschreibt der einem Punkte A_1 in der quadratischen Verwandtschaft entsprechende Punkt A_2^B einen Kegelschnitt (16.) das ist der gesuchte Ort.

Durch die Korrespondenz der Graden b_2 und c_2 kommen auch diese beiden Kegelschnitte in eine Beziehung [2,2]. Jede der Verbindungsgraden entsprechender Punkte ist in ∞^1 der ∞^2 Korrelationen, welche $\beta_1;b_2$, $\gamma_1;c_2$ befriedigen, dem A_1 konjugiert. Schneidet einer dieser Strahlen die a_2, so kann ich die gemeinsame Ebene dieser Strahlen als Ebene α_2 nehmen und habe dann drei verträgliche Paare polarer Elemente, also eine Korrelation. Wir haben also die Ordnung der von den Verbindungsgraden entsprechender Punkte auf den beiden Kegelschnitten gebildeten Regelfläche festzustellen Der Punkt A_1 ist beiden Kegelschnitten gemein und er entspricht in der Beziehung [2,2] zwischen beiden sich selbst, wie man sieht wenn man B_2 in den Schnittpunkt $(b_2\ \beta_1)$ und C_2 in $(c_2\ \gamma_1)$ legt. Die Paare $B_2;\beta_1$, $C_2;\gamma_1$, $A_1;(A_1a_2)$, in denen der Pol stets in der entsprechenden Ebene liegt, liefern nach (54.) keine Korrelation. Der Grad der Regelfläche, welcher eigentlich 8 ist, reduziert sich durch den sich selbst entsprechenden Punkt A_1 auf 7. Es gibt 7 lösende Korrelationen

. . . . . $\mu\ \rho_1^2 = 7.$

$\mu\ \rho_1\rho_2$ erfordert gar keine Aenderung der Ueberlegung und hat darum auch 7 Lösungen . . . . $\mu\ \rho_1\ \rho_2 = 7.$

(68.) $[\alpha_1;a_2,\ \beta_1;b_2,\ \gamma_1;c_2] = \rho_1^3.$

Lasse ich A_2, den Pol von α_1, auf a_2 laufen, so bestimmt er in jeder Lage zwei Pole B_2 von β_1 auf b_2; jeder von diesen bestimmt zwei Pole C_2 von γ_1 auf c_2, und jeder von diesen endlich zwei A_2' von α_1 auf a_2. Umgekehrt bestimmt jeder Punkt A_2' zwei Punkte C_2 auf c_2, jeder von ihnen zwei B_2 auf b_2, und jeder von diesen zwei Punkte A_2 von a_2. So entsteht auf a_2 eine Korrespondenz [8,8] mit 16 Koinzidenzelementen. Jedes der Koinzidenzelemente A_2 bestimmt einen Punkt B_2 und einen C_2 derart, dass die Paare $A_2;\alpha_1$, $B_2;\beta_1$, $C_2;\gamma_1$ auf den Graden A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2 die Projektivitäten konjugierter Punkte mit den Schnittpunkten

der F^2 als sich selbst konjugierten Punkten erfüllen. Einmal ist darunter das Tripel $A_2 = (a_2\ \alpha_1)$, $B_2 = (b_2\ \beta_1)$, $C_2 = (c_2\ \gamma_1)$ enthalten; in ihm liegen die Pole in ihren entsprechenden Ebenen. In den 15 anderen Fällen bestimmen die 3 Paare polarer Punkte und Ebenen je eine Korrelation. $\bar{\rho}_1^{\,3} = 15$.

Die Betrachtung ändert sich nicht bei . . $\bar{\rho}_1^{\,2}\bar{\rho}_2 = 15$.

(69.) Ferner müssen wir noch die Bedingungsgruppen, welche zwei dreifache Bedingungen enthalten, untersuchen.

Es ist $\bar{\bar{\mu}}^2 = 0$ nach (52).

$[A_1;\alpha_2,\ b_1;(B_2,\ \beta_2)] = \bar{\mu}\ \bar{\bar{\nu}}_1$.

Durch $A_1;\alpha_2$ ist die Projektivität konjugierter Punkte auf $A_1\ B_2$ festgelegt, dem B_2 ist ein Punkt $B_1{}^A$ konjugiert, Ebene $(B_1{}^A\ b_1) = \beta_1$ muss dem B_2 polar sein. Der β_2 entspricht in der durch $A_1;\alpha_2$ festgelegten zentralen quadratischen Verwandtschaft eine Fläche 2ter Ordnung, die b_1 in zwei Punkten schneidet. Nehme ich einen von diesen als den der Ebene β_2 polaren Punkt B_1, so bestimmen die drei Paare $A_1;\alpha_2$, $B_1;\beta_2$, $\beta_1;B_2$ eine Korrelation, die die gewünschten Eigenschaften hat. . . . . $\bar{\mu}\ \bar{\bar{\nu}}_1 = 2$.

Es ist natürlich auch . . . . . $\bar{\mu}\ \bar{\bar{\nu}}_2 = 2$ [1]).

§ 5. Abzählung durch Ausartungen.

a. Allgemeine Formeln.

(70.) Wir könnten auf dem eingeschlagenen Wege noch weitergehen. Doch würde die Untersuchung bei der grossen Zahl verschiedenartiger Bedingungsgruppen ermüdend, auch werden die Lösungszahlen bald so hoch, dass der synthetisch anschaulichen Untersuchung der Vorzug des tieferen Einblickes in die geometrische Gestaltung, der ihr den anderen Methoden gegenüber zukommt, verloren geht. Darum verwenden wir des weiteren Hirst's Beispiele folgend die

[1]) Eine Aufgabe will sich meinen Untersuchungen nicht fügen nämlich: zwei dreifache Gradenbedingungen $\bar{\bar{\nu}}_1$ $\bar{\bar{\nu}}_2$ und $\bar{\bar{\nu}}_1^{\,2}$.

abzählende Methode mit Hilfe der Ausartungen. Während aber Hirst bis auf die Ausartungen dritter Stufe zurückgeht, wodurch der Nachteil erwächst, dass die Bedingungsgruppen mindestens drei einfache Bedingungen enthalten müssen, beschränke ich mich auf die Ausartungen erster Stufe, und brauche darum nur die Bedingungsgruppen gesondert zu behandeln, welche gar keine einfache Bedingung enthalten, und das ist, soweit als nötig, schon geschehen.

(71.) Hirst stellt die Formeln auf[1]):

$2\mu = \nu + \omega$

$2\rho = \nu + \pi$

$2\nu = \mu + \rho + \Psi + \Psi'$, wo ω die Bedingung bedeutet, planar zu sein. Bei gegebener F^2 kann diese Bedingung nie erfüllt werden; es ist stets $\omega = 0$. Ich schreibe diese Formeln mit kleiner Umgestaltung:

$$4\mu = \pi + 2(\Psi + \Psi'') \quad \ldots\ldots \text{I.}$$
$$4\rho = 3\pi + 2(\Psi + \Psi') \quad \ldots\ldots \text{II.}$$
$$2\nu = \pi + 2(\Psi + \Psi') = 4\mu \quad \ldots \text{III.}$$

Nur die letzte, welche zu der einfachen Beziehung $\nu = 2\mu$ führt, will ich kurz direkt ableiten, im übrigen verweise ich auf Hirst: die einem Punkte von Σ_1 in einem System erster Stufe von Korrelationen polaren Ebenen erfüllen einen Torsus μter Klasse, der einem anderen Punkte zugehörige Torsus ist auf den ersten eindeutig bezogen. Das Erzeugnis — eine Regelfläche 2μter Ordnung — ist der Ort der polaren Graden von der Verbindungsgraden der beiden Ausgangspunkte. Hieraus schliesst man, weil bei gegebener F^2 planare Korrelation ausgeschlossen ist, direkt auf die Formel $\nu = 2\mu$.

(72.) Den Hirst'schen Formeln fügen wir noch drei hinzu. Vorerst fassen wir die in (28.) und (34.) gewonnenen zusammen:

$$\overline{\mu} = \overline{\mu_1} = \overline{\mu_2},\ \overline{\overline{\mu}} = \overline{\overline{\mu_1}} = \overline{\overline{\mu_2}} \quad \ldots\ldots \text{IV.}$$

---

[1]) Proc. of. Lond. Math Soc. Vol. 21 S. 97. Er braucht Ψ und Ψ' nicht zu scheiden.

In einem System zweiter Stufe von Korrelationen ist der Ort der einer Graden a_1 polaren Graden eine Kongruenz $[\overline{\mu}_2, \overline{\rho}_2]$, weil durch jeden Punkt A_2 $\overline{\mu}_2$ gehen, in jeder Ebene α_2 $\overline{\rho}_2$ liegen. Einem Strahlennetze gehören also $\overline{\mu}_2 + \overline{\rho}_2$ Kongruenzstrahlen an. Daraus folgt $\nu_1 = \overline{\mu}_2 + \rho_2$ und $\nu_2 = \overline{\mu}_1 + \overline{\rho}_1$ oder mit Benutzung von IV.

$$\overline{\nu}_1 = \overline{\mu} + \overline{\rho}_2, \quad \overline{\nu}_2 = \overline{\mu} + \overline{\rho}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

In einem Korrelationssystem dritter Stufe bilden die einer Graden a_1 polaren Graden einen Komplex $\overline{\overline{\nu}}_1$ten Grades, weil jedem Strahlenbüschel (A_2, α_2) $\overline{\overline{\nu}}_1$ Strahlen angehören. Einer durch drei Leitstrahlen a_2', a_2'', a_2''' gegebenen Regelschar gehören $2\,\overline{\overline{\nu}}_1$ Komplexstrahlen an. Es folgt:

$$\overline{\overline{\nu}}_1' = 2\,\overline{\overline{\nu}}_1, \quad \overline{\overline{\nu}}_2' = 2\,\overline{\overline{\nu}}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VI.}$$

Unsere Aufgabe ist es nun die Anzahlen von ausgearteten Korrelationen des Typus π, Ψ', Ψ'', die alle möglichen Kombinationen von fünf einfachen Bedingungen oder mehrfachen in äquivalenter Anzahl befriedigen, zu bestimmen.

b. Die zentrale Korrelation.

(73.) In diesem Abschnitt benutze ich die Resultate des bereits erwähnten im 13ten Bande des „Archivs der Mathematik und Physik“ erscheinenden Aufsatzes: Systeme korrelativer Bündel, welche eine gegebene F^2 erzeugen.

Die räumliche Zentral-Korrelation ist nämlich nichts anderes als eine Bündel-Korrelation. Trotzdem lassen sich die Resultate nicht direkt übernehmen, weil die Bedingungen, welche sich bei der Bündel-Korrelation natürlich ergeben, zum Teil von denen verschieden sind, die wir der zentralen Raum-Korrelation aufzuerlegen haben. Da ich im wesentlichen dieselben Symbole benutzt habe, so setze ich in diesem Abschnitt den auf die zentrale Raum-Korrelation bezüglichen den Index Z, den auf die Bündel-Korrelation bezüglichen den Index B bei.

(74.) Folgende Symbole stimmen in ihrer Bedeutung hier und dort überein:

$$(\mu)_Z = (\mu)_B,\ (\bar{\mu})_Z = (\bar{\mu})_B,\ (\bar{\mu})_Z = (\mu)_B \ldots \text{I}_\pi.$$
$$(\nu)_Z = (\nu)_B \ldots \text{II}_\pi.$$

Die anderen weichen ab.

$(\rho)_Z = [\alpha_1;\alpha_2]$ verlangt in zentraler Raum-Korrelation, dass entweder O_1 in α_1 oder O_2 in α_2 liegt; denn der Pol einer Ebene α_1 ist der Scheitel des Bündels in Σ_2. Das sind grade die a. a. O. mit p_1, p_2 bezeichneten Lagebedingungen für die Scheitel

$$(\rho)_Z = (p_1 + p_2)_B \ldots \text{III}_\pi.$$

$(\bar{\rho}_1)_Z = [\alpha_1;a_2]$ verlangt, dass der Pol von α_1 in α_2 liegt; das ist erstens erreicht, wenn O_1 in α_1 liegt und der Ebene α_1 ein die Grade a_2 schneidender Strahl in der Bündel-Korrelation entspricht, denn jeder Punkt dieses Strahles ist ein Pol von α_1 in der räumlichen Korrelation, also auch der Schnittpunkt mit a_2 — d. i. die Bedingung $(\bar{p}_1)_B$.

Es ist ferner erreicht, wenn O_2 auf a_2 liegt:

$$\left.\begin{aligned}(\bar{\rho}_1)_Z &= (\bar{p}_1 + p_2{}^2)_B \\ (\bar{\rho}_2)_Z &= (\bar{p}_2 + p_1{}^2)_B\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{IV}_\pi.$$

$(\bar{\nu}_1)_Z = [a_1;a_2', a_2'']$ verlangt, dass die den a_2' und a_2'' polaren Graden die a_1 schneiden. Das ist einmal bei freier Lage von O_1, O_2 erfüllt, wenn der Ebene $(O_1\ a_1)$ der Treffstrahl von O_2 an a_2', a_2' entspricht, denn den a_2', a_2'' sind in zentraler räumlicher Korrelation die Strahlen polar, die den Ebenen $(O_2\ a_2')$, $(O_2\ a_2')$ in Bündel-Korrelation entsprechen, und diese schneiden bei der angegebenen Lage beide a_1 — d. i. die Bedingung $(\bar{\nu}_1)_B$ —. Dasselbe ist aber auch erfüllt, wenn O_1 nur auf a_1 liegt, denn dann schneiden sich die beiden den Ebenen $(O_2\ a_2')$, $(O_2\ a_2'')$ entsprechenden Graden in O_1 auf a_1:

$$\left.\begin{aligned}(\bar{\nu}_1)_Z &= (\bar{\nu}_1 + p_1{}^2)_B \\ (\bar{\nu}_2)_Z &= (\bar{\nu}_2 + p_2{}^2)_B\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{V}_\pi.$$

$(\bar{\nu}_1)_Z = [a_1;(A_2, a_2)]$ verlangt, dass der polare Strahl von a_1 in der räumlichen Korrelation dem Strahlenbüschel (A_1, α_2) angehört. Dies ist einmal erreicht, wenn O_2 in α_2 liegt und

dem Strahle $O_2 A_2$ in der Bündel-Korrelation die Ebene $(O_1 a_1)$ entspricht; — d. i. $(\nu_1)_B$ —. Es ist auch noch erfüllt, wenn O_1 in a_1 liegt und dem Strahle a_1 eine Ebene von O_2 entspricht, die durch A_2 geht; denn einem Strahle von O_1 ist in der zentralen räumlichen Korrelation jeder Strahl der Ebene polar, die ihm in der Bündel-Korrelation entspricht, also dem a_1 hier auch der Schnittstrahl jener Ebene mit α_2.

$$(\bar{\nu}_1)_Z = (\bar{\nu}_1 + p_1{}^2\mu)_B, \quad (\bar{\nu}_2)_Z = (\bar{\nu}_2 + p_2{}^2\mu)_B \ . \ . \ . \ VI_\pi.$$

Die Formel VI in (72.) $\bar{\nu}_1' = 2\bar{\nu}_1$ gilt auch, wenn das Korrelationssystem erstei Stufe durchweg zentral ist. Daraus folgt sogleich:

$$(\bar{\nu}_1')_Z = 2(\bar{\nu}_1 + p_1{}^2\mu)_B, \quad (\bar{\nu}_2')_Z = 2(\bar{\nu}_2 + p_2{}^2\mu)_B \ . \ . \ . \ VII_\pi.$$

Die Bedingung $(\bar{\bar{\nu}})_Z = [a_1;a_2]$, bestehend aus zwei polaren Graden ist erfüllt, wenn O_1 auf a_1 liegt und dem Strahl a_1 die Ebene $O_1 a_2$ entspricht, oder wenn O_2 auf a_2 liegt und dem Strahl a_2 die Ebene O_1 a_2 entpricht.

$$(\bar{\bar{\nu}})_Z = (\bar{\bar{\nu}}_1 + \bar{\bar{\nu}}_2)_B \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ VIII_\pi.$$

(75.) Der Index π an den Nummern der Formeln soll darauf hinweissen, dass die Formeln sich auf die ausgeartete Korrelation vom Typus π beziehen.

Die π überschriebene Kolonne der Tabelle in (87.) gibt die Zahl der zentralen Korrelationen, welche die links stehenden symbolischen Produkte befriedigen. Man findet sie, indem man die Symbole dieses Kapitels mit Hilfe der Formeln der vorigen Nummer durch die Symbole des genannten Aufsatzes ausdrückt und die Lösungszahlen aus der dort aufgestellten Tabelle entnimmt.

c. Achsiale Korrelation.

(76.) Vergegenwärtigen wir uns zuerst allgemein, welche Bedeutung die behandelten Bedingungstypen für achsiale Korrelation haben.

$\mu = [A_1;A_2]$ verlangt, dass die projektiven Ebenenbüschel um die Achsen o_1, o_2 nach A_1, A_2 entsprechende Ebenen senden.

$\rho = [\alpha_1;\alpha_2]$ verlangt, dass die projektiven Punktreihen der Achsen in α_1, α_2 entsprechende Punkte liegen haben.

$\nu = [a_1;a_2]$ verlangt, dass o_1 die a_1 oder o_2 die a_2 schneidet.

$\overline{\mu} = [A_1;a_2]$ verlangt, dass o_1 durch A_1 geht, oder dass O_2 die a_2 schneidet und der Ebene $(O_2\ a_2)$ in der Ebenenbüschelprojektivität die Ebene $(o_1\ A_1)$ entspricht.

$\overline{\rho} = [\alpha_1;a_2]$ verlangt, dass o_1 in α_1 liegt, oder dass o_2 die a_2 schneidet und dem Punkte $(o_2\ a_2)$ in der Punktreihenprojektivität der Punkt $(o_1\ \alpha_1)$ entspricht.

$\overline{\nu_1} = [a_1;a_2'\ a_2'']$ verlangt, dass o_2 die a_2' und a_2'' schneidet, oder dass o_1 die a_1 schneidet und der Ebene $(o_1\ a_1)$, dem Punkte $o_1\ a_1$ in den Projektivitäten um und auf den Achsen eine Ebene, ein Punkt von o_2 entsprechen, welche dieselbe Treffgrade an a_2', a_2'' besitzen; denn dem a_1 ist in diesem Falle das Strahlenbüschel in dieser Ebene um diesen Punkt polar und dieses enthält dann eine Treffgrade von a_2', a_2''.

$\overline{\mu_1} = [A_1;\alpha_2]$ verlangt, dass o_1 durch A_1 geht und dem Punkte A_1 auf o_1 der Punkt $(o_2\ \alpha_2)$ auf o_2 entspricht, oder dass o_2 in α_2 liegt und der Ebene α_2 von o_2 die Ebene $(o_1\ A_1)$ von o_1 entspricht.

$\overline{\overline{\nu_1}}' = [a_1;a_2',\ a_2'',\ a_2''']$ verlangt, dass o_2 die Graden a_2', a_2'', a_2''', trifft, oder dass o_1 die a_1 trifft und dem Punkte $(o_1\ a_1)$, der Ebene $(o_1\ a_1)$ auf und um o_2 ein Punkt, eine Ebene entspricht, welche ein und dieselbe Treffgrade an a_2', a_2'', a_2''', besitzen.

$\overline{\overline{\nu_1}} = [a_1;(A_2,\alpha_2)]$ verlangt, dass o_2 dem Strahlenbüschel $(A_2,\ \alpha_2)$ angehört, oder dass o_1 die a_1 trifft und dem Punkte $(o_1\ a_1)$, der Ebene $(o_1\ a_1)$ auf und um o_2 der Punkt $(o_2\ \alpha_2)$, die Ebene $(o_2\ A_2)$ entspricht.

$\overline{\nu} = [\ \alpha_1;a_2]$ verlangt, dass o_1 in α_1, oder dass o_2 in α_2 fällt, oder dass O_1 die α_1, o_2 die α_2 schneidet und dabei

dem Punkte $(o_1\ a_1)$, der Ebene $(o_1\ a_1)$ von o_1 auf und um o_2 der Punkt $(o_2\ a_2)$, die Ebene $(o_2\ a_2)$ entspricht.

Wir wollen noch Lagebedingungen für die Achsen hilfsweise einführen:

Die einfachen Bedingungen s_1, s_2 verlangen: o_1 bezw. o_2 soll eine gegebene Grade schneiden. Die doppelten Bedingungen σ_1, σ_2 und die dazu dualen τ_1, τ_2 bedeuten: o_1 bezw. o_2 soll in einer gegebenen Ebene liegen, dual: o_1 bezw. o_2 soll durch einen gegebenen Punkt gehen.

(77.) Die aus (72) entnommenen Formeln

$$\bar{\nu}_1 = \bar{\mu}_2 + \bar{\rho}_2,\ \bar{\nu}_2 = \bar{\mu}_1 + \bar{\rho}_1 \quad \ldots \quad I_A.$$

$$\bar{\nu}_1' = 2\bar{\nu}_1 \quad , \bar{\nu}_2' = 2\bar{\nu}_2 \quad \ldots \quad II_A.$$

gelten auch für Systeme von achsialen Korrelationen.

Wir suchen weitere:

$\bar{\mu}_1 = [A_1;a_2]$. Ich lege einen beliebigen Punkt A_2 auf a_2. Dann ist $\bar{\mu}_1$ erfüllt, wenn o_1 durch A_1 geht (τ_1), oder o_2 die a_2 schneidet und $A_1;A_2$ konjugiert sind $(s_2\ \mu)$, ausgenommen dabei sind diejenigen Fälle, in denen o_2 durch A_2 geht (τ_2). Es gilt daher:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}_1 &= \tau_1 + s_2\,\mu - \tau_2,\\ \bar{\mu}_2 &= \tau_2 + s_1\,\mu - \tau_1.\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad III_A.$$

$\bar{\rho}_1 = [\alpha_1;a_2]$. Ich lege eine beliebige Ebene α_2 durch a_2. $\bar{\rho}_1$ ist erfüllt, wenn o_1 in α_1 liegt, oder o_2 die a_2 schneidet und dabei $\alpha_1;\alpha_2$ konjugiert sind, abgesehen von den darunter enthaltenen Fällen, in denen o_2 in α_2 liegt.

$$\left.\begin{aligned}\bar{\rho}_1 &= \sigma_1 + s_2\,\rho - \sigma_2\\ \bar{\rho}_2 &= \sigma_2 + s_1\,\rho - \sigma_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad IV_A.$$

$\bar{\bar{\mu}}_1 = [A_1;\alpha_2]$. Ich lege eine beliebige Ebene α_1 durch A_1. $\bar{\bar{\mu}}_1$ ist befriedigt, wenn o_1 durch A_1 geht und $\alpha_1;\alpha_2$ konjugiert sind, abgesehen von den Fällen, in welchen o_1 in α_1 liegt, d. h. wenn es eine beliebige Grade a_1 in α_1 schneidet $(\tau_1\rho - \tau_1 s_1)$. $\bar{\bar{\mu}}_1$ wird ferner befriedigt, wenn o_2 in α_2 liegt und — wenn A_2 ein beliebiger fester Punkt in α_2 ist — $A_1;A_2$ konjugiert sind, ausschliesslich der Fälle, in denen o_2 durch A_2 geht d. h. eine beliebige Grade durch A_2 schneidet $(\sigma_2\ \mu - \sigma_2\ s_2)$;

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{\mu_1}} &= \tau_1\rho - \tau_1 s_1 + \sigma_2\mu - \sigma_2 s_2 \\ \overline{\overline{\mu_2}} &= \tau_2\rho - \tau_2 s_2 + \sigma_1\mu - \sigma_1 s_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; V_A.$$

$\overline{\overline{\nu_1}} = [a_1;(A_2, \alpha_2)]$. Ich lege durch a_1 eine beliebige feste Ebene α_1, auf a_1 einen beliebigen festen Punkt A_1. ν_1 ist erfüllt, wenn o_2 dem Strahlenbüschel (A_2, α_2) angehört. Das kann ich formulieren: wenn o_2 in α_2 liegt und eine beliebige Grade durch A_2 schneidet $(\sigma_2\ s_2)$. Es ist ferner erfüllt, wenn o_1 die a_1 schneidet und $A_1;A_2$, $\alpha_1;\alpha_2$ konjugiert sind, abzüglich der Fälle, in denen o_1 durch A_1 geht oder in α_1 liegt $(s_1\ \mu\ \rho - \tau_1\ \rho - \sigma_1\ \mu)$;

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{\nu_1}} &= \sigma_2 s_2 + s_1\mu\rho - \tau_1\rho - \sigma_1\mu, \\ \overline{\overline{\nu_2}} &= \sigma_1 s_1 + s_2\mu\rho - \tau_2\rho - \sigma_2\mu. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; VI_A.$$

$\overline{\overline{\overline{\nu}}} = [a_1;a_2]$. Ich lege die beliebigen festen Ebenen α_1, α_2 durch a_1, a_2, die beliebigen festen Punkte A_1, A_2 auf a_1, a_2. $\overline{\overline{\overline{\nu}}}$ ist erfüllt, wenn o_1 mit a_1 oder o_2 mit a_2 zusammen fällt $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ oder $\tau_1^2 + \tau_2^2)$, oder wenn o_1 die a_1, o_2 die a_1 schneidet und $A_1;A_2$, $\alpha_1;\alpha_2$ konjugiert sind, abzüglich der Fälle, in denen o_1 in α_1 liegt oder durch A_1 geht, oder o_2 in α_2 liegt oder durch A_2 geht $(s_1\ s_2\ \mu\ \rho - \sigma_1\ s_2\ \mu - \tau_1\ s_2\ \rho - \sigma_2\ s_1\ \mu - \tau_2\ s_1\ \rho)$;

$$\overline{\overline{\overline{\nu}}} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + s_1 s_2 \mu\rho - \sigma_1 s_2 \mu - \tau_1 s_2 \rho - \sigma_2 s_1 \mu - \tau_2 s_1 \rho \ldots VII_A.$$

(78.) Den Nummern der Formeln ist der Index A beigefügt, um anzugeben, dass sie sich auf achsiale Korrelation beziehen.

Diese allgemein gültigen Formeln vereinfachen sich sehr, wenn wir nun wieder Korrelationssysteme voraussetzen, welche die Punktkernfläche gemein haben.

Die Typen Ψ' und Ψ'' sind völlig getrennt, gehen auch nicht in einander über; die Formeln gelten für jeden Typus einzeln.

(79.) *Behandeln wir zuerst den Typus* Ψ'': Zwei getrennte auf F^2 liegende Achsen.

Die Bedingungen σ_1, σ_2, τ_1, τ_2 sind von vornherein unerfüllbar, desgleichen höhere als die ersten Potenzen von s_1 und s_2.

Die Bedingung μ kann nach (1.) . . (5.) höchstens in der zweiten Potenz befriedigt werden; unerfüllbar sind auch $s_1\,\mu^2$, $s_1\,\mu^2$. Die Formeln vereinfachen sich in:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\nu_1} &= \overline{\mu_2} + \overline{\rho_1}\\ \overline{\nu_2} &= \overline{\mu_1} + \overline{\rho_1}\end{aligned}\right\} \ldots \text{ I}\psi'. \qquad \left.\begin{aligned}\overline{\overline{\nu_1}} &= 2\,\overline{\nu_1}\\ \overline{\overline{\nu_2}} &= 2\,\overline{\nu_2}\end{aligned}\right\} \ldots \text{ II}\psi'.$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mu_1} &= s_2\,\mu\\ \overline{\mu_2} &= s_1\,\mu\end{aligned}\right\} \ldots \text{ III}\psi'. \qquad \left.\begin{aligned}\overline{\rho_1} &= s_2\,\rho\\ \overline{\rho_2} &= s_1\,\rho\end{aligned}\right\} \ldots \text{ IV}\psi'.$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\overline{\mu_1}} &= 0\\ \overline{\overline{\mu_2}} &= 0\end{aligned}\right\} \ldots \text{ V}\psi'. \qquad \left.\begin{aligned}\overline{\overline{\nu_1}} &= s_1\mu\rho\\ \overline{\overline{\nu_2}} &= s_2\mu\rho\end{aligned}\right\} \ldots \text{ VI}\psi'.$$

$$\equiv$$

$\nu = s_1 s_2 \mu\rho$ . . . VIIψ', dazu kommt:

$\nu = 2\mu$ . . VIIIψ'; denn:

Nach (3.) und (5.) ist bei gegebenem $\mu = [A_1;A_2]$ jedem Strahl o_1 in einer Regelschar von F^2 ein Strahl o_2 derselben so assoziiert, dass die projektiven Ebenenbüschel um o_1 und o_2, welche die andere Schar erzeugen nach A_1 und A_2 entsprechende Ebenen senden. Bei $\nu = [a_1;a_2]$ sind jedem o_1 einer Schar zwei Strahlen o_2 derselben assoziiret, nämlich die beiden, welche a_2 schneiden. Daraus kann man bereits sehen, dass die Lösungszahl sich jedesmal mit 2 multipliziert, wenn μ durch ν ersetzt wird.

Wir brauchen uns nur noch mit solchen symbolischen Produkten 5ter Dimension zu befassen, welche lediglich aus Bedingungen μ, ρ, s_1, s_2 zusammengesetzt sind; alle andern ergeben sich durch die Formeln.

(80.) $\mu^2\,\rho^3 = [A_1,A_2,\ B_1;B_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

$A_1;A_2$, $B_1;B_2$ bestimmen in jeder der beiden Scharen auf F^2 zwei Achsenpaare (4). Die Schnittpunkte mit γ_1, δ_1, ε_1 bezw. γ_2, δ_2, ε_2 legen die Punktprojektivität fest: $\mu^2\,\rho^3 = 4$.

$\mu\,\rho^4 = [A_1;A_2,\ \beta_1;\beta_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Ist o_1 eine Grade der einen Schar von F^2, so schneidet der tetraedrale Komplex der Strahlen, die β_2, γ_2, δ_2, ε_2 unter

demselben Doppelverhältnis schneiden wie o_1 die $\beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$ in dieselbe Schar 4 Strahlen ein. In jeder Schar liegt eine Beziehung [4, 4] von Strahlen, welche die 4 Ebenen des einen und anderen Raumes unter gleichem Doppelverhältnis schneiden. Ausserdem liegt in jeder Schar eine Projektivität von Strahlen, die bezüglich $A_1;A_2$ assoziiert sind. Beide Verwandschaften haben 8 Paare gemein[1]). Diese sind als Achsen möglich: . . . . . $\mu\,\rho^4 = 16$.

$\rho^5 = [\alpha_1;\alpha_2,\ \beta_1;\beta_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Die Paare $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$, $\gamma_1;\gamma_2$, $\delta_1;\delta_2$ und $\alpha_1;\alpha_2, \beta_1;\beta_2, \gamma_1;\gamma_2$, $\varepsilon_1;\varepsilon_2$ bestimmen in jeder Schar je eine Beziehung [4,4] von Strahlen, indem solche Strahlen entsprechend sind, die von den 4 Ebenen des ersten bzw. zweiten Raumes unter gleichem Doppelverhältnis geschnitten werden. Beide Verwandtschaften haben $4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 32$ Paare gemein. Ein solches Paar erlaubt nur dann den Schluss, dass seine beiden Strahlen alle 5 Ebenen von Σ_1 bezw. Σ_2 unter gleichem Doppelverhältnis schneiden, wenn $\alpha_1;\alpha_2$, $\beta_1;\beta_2$, $\gamma_1;\gamma_2$ für sich die Projektivität eindeutig bestimmen. Das geschieht nicht bei folgenden Paaren, die doch andererseits sicher unter den 32 enthalten sind; o_1 ist einer der Strahlen, welche die Graden $\alpha_1\,\beta_1$ oder $\beta_1\,\gamma_1$ oder $\gamma_1\,\alpha_1$ schneiden, während o_2 beziehlich $\alpha_2\,\beta_2$, $\beta_2\,\gamma_2$, $\gamma_2\,\alpha_2$ schneidet. Es bleiben in jeder Schar $32 - 12 = 20$ Paare, bei denen jener Schluss erlaubt ist. . . . . $\rho^5 = 4\,0$.

(81.) Weiter bestimmen wir so:

$s_1\,\mu\,\rho^3 = [a_1,\ B_1;B_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

a_1 wird in jeder Schar von 2 Strahlen geschnitten, jedem ist bezüglich $B_1;B_2$ ein Strahl assoziiert. So erhält man in jeder Schar 2 Achsenpaare, auf denen die Schnitt-

---

[1]) Liegen auf einem unikursalen Träger $g_1 = g_2$ zwei Verwandtschaften $[m_1, m_2]$ und $[n_1, n_2]$, so gibt es $m_1\,n_2 + m_2\,n_1$ Punktepaare, die aus entsprechenden Punkten für beide Verwandtschaften bestehen.

Beweis: Einem Punkte von g_1 entsprechen in der einen Verwandtschaft m_1 Punkte von g_2, jedem von diesen n_2 Punkte von g_1 in der anderen. So liegt in g_1 selbst eine Verwandtschaft $[m_1\,n_2, m_2\,n_1]$ mit $m_1\,n_2 + m_2\,n_1$ Konzidenzelementen, deren jedem in beiden gegebenen Verwandschaften ein und derselbe Punkt von g_2 entspricht.

punkte mit den 3 Ebenenpaaren die Projektivität bestimmen . . . . . $s_1 \mu^3 \rho = 4.$

$s_1 \rho^4 = [a_1, \beta_1;\beta_2, \gamma_1;\gamma_2, \delta_1;\delta_2, \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Die vier Ebenenpaare bestimmen wie oben in jeder der beiden Scharen eine Verwandtschaft [4,4]. Die je 2 schneidenden Strahlen von a_1 und ihre 4 entsprechenden bilden die Achsenpaare. . . . . $s_1 \rho^4 = 16.$

$s_1 s_2 \rho^3 = [a_1, b_2, \gamma_1;\gamma_2, \delta_1;\delta_2, \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

In jeder Schar bildet jeder der beiden Treffstrahlen von a_1 mit jeder der beiden Treffgraden von b_2 ein Achsenpaar, die Punktprojektivität wird durch die 3 Ebenenpaare eingeschnitten. . . . . $s_1 s_2 \rho^3 = 8.$

(82.) Alle anderen aus s_1, s_2, μ, ρ gebildeten symbolischen Produkte haben die Lösungszahl null.

In der Tabelle (87.) gibt die Kolonne Ψ'' die Anzahlen der achsialen Korrelationen vom Typus Ψ'' für die links stehenden Bedingungsgruppen. Sie sind durch die Formeln von (79.) berechnet aus den Resultaten von (80.) (81.).

(83.) *Wenden wir uns zu den achsialen Korrelationn vom Punkt* Ψ mit zusammengefallenen Achsen und identischen Ebenenbüscheln.

Weil die beiden Achsen identisch sind, so ist

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma, \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau, \quad s_1 = s_2 = s.$$

Weil die projektiven Ebenenbüschel identisch sein sollen, so muss bei $\mu = [A_1;A_2]$ die Verbindungsgrade $A_1 A_2$ von der Achse geschnitten werden:

$$s = \mu.$$

Die Formeln von (77.) vereinfachen sich in:

$\bar{\nu} = \bar{\mu} + \bar{\rho}$ . . . IΨ, $\bar{\bar{\nu}} = 2\bar{\nu}$. . . . . II$\Psi$,

$\bar{\mu} = s\mu = \mu^2$ IIIΨ, $\bar{\rho} = s\rho = \mu\rho$ . . . IVΨ,

$\bar{\bar{\mu}} = \tau\rho - \tau\mu$ VΨ, $\bar{\bar{\nu}} = s\mu\rho - \tau\rho$ . . VIΨ.

Die rechten Seiten bestätigen, dass man zwischen $\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ u. s. w. nicht zu unterscheiden braucht. Ferner gilt:

$\bar{\bar{\nu}} = 2\sigma^2$ . . . . VIIΨ.

Die letzte Formel ergibt sich nicht so leicht aus VII$_A$ in (77.), sondern besser durch die Ueberlegung, dass die Bedingung

$[a_1;a_2] = \nu$ nur dadurch erfüllt werden kann, dass die Achse entweder mit a_1 oder mit a_2 zusammenfällt.

Endlich gilt noch: . . . $\nu = 2\ \mu = 2\ s$ . . . VIIIΨ, denn zur Befriedigung von $\nu = [a_1;a_2]$ muss die Achse entweder a_1 oder a_2 schneiden.

(84.) Wir brauchen uns nur mit den Bedingungsgruppen zu beschäftigen, welche aus den Symbolen μ, ρ, σ, τ zusammengesetzt sind: alle andern lassen sich durch obige Formeln aus diesen berechnen.

Die mit Ψ überschriebene Kolonne der Tabelle in (87.) enthält die Anzahlen der speziellen achsialen Korrelationen Ψ für die links stehenden Bedingungsgruppen.

(85.) $\sigma^2\mu = [\alpha,\ \beta,\ C_1;C_2]$.

Die Achse o kann nicht zugleich in α und β liegen und $C_1\ C_2$ schneiden . . . . . $\sigma^2\mu = 0$.

$\sigma^2\rho = [\alpha,\ \beta,\ \gamma_1;\gamma_2]$.

o kann nur die Grade $(\alpha\ \beta)$ sein, $\gamma_1;\gamma_2$ und F^2 bestimmen die Punktprojektivität . . . . . $\sigma^2\rho = 1$.

$\sigma\tau\mu = [\alpha,\ B,\ C_1;C_2]$ und $\sigma\tau\rho = [\alpha,\ B,\ \gamma_1;\gamma_2]$.

o kann nicht zugleich in α liegen und durch B hindurch gehen . . . . . $\sigma\tau\mu = \sigma\tau\rho = 0$.

$\sigma\mu^3 = [\alpha,\ B_1;B_2,\ C_1;C_2,\ D_1;D_2]$.

o kann nicht zugleich in α liegen und $B_1\ B_2$, $C_1\ C_2$, $D_1\ D_2$ schneiden . . . . . $\sigma\mu^3 = 0$.

$\sigma\mu^2\rho = [\alpha,\ B_1;B_2,\ C_1;C_2,\ \delta_1;\delta_2]$.

In α liegt eine Treffgrade o von $B_1\ B_2$, $C_1\ C_2$. $\delta_1;\delta_2$ bestimmt die Punktprojektivität . . . . . $\sigma\mu^2\rho = 1$.

$\sigma\mu\rho^2 = [\alpha,\ B_1;B_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2]$.

In α gehen durch den Spurpunkt von $B_1\ B_2$ drei Grade, die F^2, $\gamma_1;\gamma_2$, $\delta_1;\delta_2$ in konjektiven Punktreihen schneiden (10). . . . . $\sigma\mu\rho^2 = 3$.

$\sigma\rho^3 = [\alpha,\ \beta_1;\beta_2,\ \gamma_1;\gamma_2.\ \delta_1;\delta_2]$.

In α liegen sieben Grade, die die drei Ebenenpaare und F^2 in konjektiven Punktreihen schneiden (11). . $\sigma\rho^3 = 7$.

τ ist zu σ dual.

(86.) $\mu^5 = [A_1;A_2,\ B_1;B_2,\ C_1;C_2,\ D_1;D_2,\ E_1;E_2]$.

5 Grade haben i. A. keine Treffgrade . . . . . $\mu^5 = 0$

$\mu^4\rho = [A_1;A_2,\ B_1;B_2,\ C_1;C_2,\ D_1;D_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Die beiden Treffgraden an $A_1\ A_2$, $B_1\ B_2$, $C_1\ C_2$, $D_1\ D_2$ sind die Achsen und die Schnittpunkte mit $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$ legen die Punktprojektivität fest . . . . . $\mu^4\rho = 1$

$\mu^3\ \rho^2 = [A_1;A_2, B_1;B_2,\ C_1;C_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Achsen sind die 6 Strahlen, welche der mit der Regelschar $(A_1\ A_2,\ B_1\ B_2,\ C_1\ C_2)$ verbundenen Leitschar und demjenigen Komplex dritten Grades (10) gemeinsam sind, dessen Strahlen die beiden Ebenenpaare in konjektiven Punktreihen schneiden . . . . . $\mu^3\ \rho^2 = 6$

$\mu^2\rho^3 = [A_1;A_2,\ B_1;B_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Achsen sind die 14 Strahlen, welche dem Netz mit den Leitgraden $A_1\ A_2$, $B_1\ B_2$ und derjenigen Kongruenz [7,7] (11.) gemeinsam sind, deren Strahlen F^2 und die drei Ebenenpaare in konjektiven Punktreihen schneiden . . $\mu^2\rho^3 = 14$

$\mu\rho^4 = [A_1;A_2,\ \beta_1;\beta_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Es gibt eine Regelfläche 26ter Ordnung (12.), deren Strahlen F^2 und die vier Ebenenpaare in konjektiven Punktreihen schneiden. Die 26 Schnittstrahlen von $A_1\ A_2$ sind die möglichen Achsen . . . . . $\mu\rho^4 = 26$.

$\rho^5 = [\alpha_1;\alpha_2,\ \beta_1;\beta_2,\ \gamma_1;\gamma_2,\ \delta_1;\delta_2,\ \varepsilon_1;\varepsilon_2]$.

Es gibt 38 Strahlen, welche F^2 und die fünf Ebenenpaare in konjektiven Punktreihen schneiden (13.); jeder kann hier Ache sein.

d. Tabellen-Aufstellung.

(87.) Aus den Anzahlen der Ausartungen π, Ψ, Ψ' bei allen Bedingungskombinationen fünfter Dimension, die zur Punktkernfläche hinzutreten, berechnen wir mittels der Hirst'schen Formeln (71) und der neuen von (72) die Anzahlen der Korrelationen, welche F^2 zur Punktkernfläche haben und alle möglichen Bedingungsprodukte 6ter Dimension erfüllen, soweit eine einfache Bedingung als Faktor in dem Produkt enthalten ist. Soweit als möglich benutzt man praktisch die Resultate des § 4.

Die symbolischen Produkte der ersten Gruppe der folgenden Tabelle enthalten nur einfache Bedingungen, der zweiten eine zweifache, der dritten Gruppe zwei zweifache, der vierten Gruppe eine dreifache, der fünften eine vierfache Bedingung.

Wegen der einfachen Relation $\nu = 2\mu$ ist die Bedingung ν nur in einer Kolonne aufgenommen. $\overline{\nu'}$ ist wegen der einfachen Beziehung $\overline{\nu'} = 2\,\overline{\nu}$ ganz vernachlässigt.

Jedes Glied der ersten sechs Kolonnen gibt die Lösungszahl für das symbolische Produkt, das die Ueberschriften seiner Zeile und seiner Kolonne zu Faktoren hat. Von zwei symbolischen Produkten, die sich durch Dualität oder Raumvertauschung ergeben, ist stets nur eins aufgenommen.

	π	Ψ	Ψ'	μ	ρ	ν	N
μ^5	4	0	0	1	3	2	1
$\mu^4\,\rho$	8	2	0	3	7	6	1
$\mu^3\,\rho^2$	16	6	0	7	15	14	1
$\mu^2\,\rho^3$	24	14	4	15	27	30	1
$\mu\,\rho^4$	24	26	16	27	39	54	1
ρ^5	0	38	40	39	39	78	1
$\overline{\mu}\,\mu^3$	4	0	0	1	3	2	1
$\overline{\mu}\,\mu^2\,\rho$	8	2	0	3	7	6	1
$\overline{\mu}\,\mu\,\rho^2$	16	6	0	7	15	14	1
$\overline{\mu}\,\rho^3$	24	14	4	15	27	30	1
$\overline{\rho_1}\,\mu^3$	8	2	0	3	7	6	1
$\overline{\rho_1}\,\mu^2\,\rho$	16	6	0	7	15	14	1
$\overline{\rho_1}\,\mu\,\rho^2$	24	14	4	15	27	30	1
$\overline{\rho_1}\,\rho^3$	24	26	16	27	39	54	1
$\overline{\nu_1}\,\mu^3$	12	2	0	4	10	8	2
$\overline{\nu_1}\,\mu^2\,\rho$	24	8	0	10	22	20	2
$\overline{\nu_1}\,\mu\,\rho^2$	40	20	4	22	42	44	2
$\overline{\nu_1}\,\rho^3$	48	40	20	42	66	84	2

	π	Ψ	Ψ′	μ	ρ	ν	N
$\overline{\mu^2\ \mu}$	4	0	0	1	3	2	1
$\overline{\mu^2\ \rho}$	8	2	0	3	7	6	1
$\overline{\mu\ \rho_1\ \mu}$	8	2	0	3	7	6	1
$\overline{\mu\ \rho_1\ \rho}$	16	6	0	7	15	14	1
$\overline{\rho_1\ \rho_1\ \mu}$	16	6	0	7	15	14	1
$\overline{\rho_1\ \rho_1\ \rho}$	32	14	0	15	31	30	1
$\overline{\rho_1\ \rho_2\ \mu}$	16	6	0	7	15	14	1
$\overline{\rho_1\ \rho_2\ \rho}$	16	14	8	15	23	30	1
$\overline{\mu\ \nu_1\ \mu}$	12	2	0	4	10	8	2
$\overline{\mu\ \nu_1\ \rho}$	24	8	0	10	22	20	2
$\overline{\rho_1\ \nu_1\ \mu}$	24	8	0	10	22	20	2
$\overline{\rho_1\ \nu_1\ \rho}$	32	20	8	22	38	44	2
$\overline{\rho_1\ \nu_2\ \mu}$	24	8	0	10	22	20	2
$\overline{\rho_1\ \nu_2\ \rho}$	48	20	0	22	46	44	2
$\overline{\nu_1\ \nu_1\ \mu}$	36	10	0	14	32	28	4
$\overline{\nu_1\ \nu_1\ \rho}$	72	28	0	32	68	64	4
$\overline{\nu_1\ \nu_2\ \mu}$	36	10	0	14	32	28	4
$\overline{\nu_1\ \nu_2\ \rho}$	56	28	8	32	60	64	4
$\overline{\overline{\mu\ \mu^2}}$	2	1	0	1	2	2	0
$\overline{\overline{\mu\ \mu\ \rho}}$	4	2	0	2	4	4	0
$\overline{\overline{\mu\ \rho^2}}$	8	4	0	4	8	8	0
$\overline{\overline{\mu\ \mu}}$	2	1	0	1	2	2	0
$\overline{\overline{\mu\ \rho_1}}$	4	2	0	2	4	4	0
$\overline{\overline{\mu\ \nu_1}}$	6	3	0	3	6	6	0
$\overline{\overline{\nu_1\ \mu^2}}$	6	1	0	2	5	4	1
$\overline{\overline{\nu_1\ \mu\ \rho}}$	12	4	0	5	11	10	1
$\overline{\overline{\nu_1\ \rho^2}}$	16	10	4	11	19	22	1
$\overline{\overline{\nu_1\ \mu}}$	6	1	0	2	5	4	1
$\overline{\overline{\nu_1\ \rho_1}}$	12	4	0	5	11	10	1
$\overline{\overline{\nu_1\ \rho_2}}$	12	4	0	5	11	10	1
$\overline{\overline{\nu_1\ \nu_1}}$	18	5	0	7	16	14	2
$\overline{\overline{\nu_1\ \nu_2}}$	18	5	0	7	16	14	2
$\overline{\overline{\nu\ \mu}}$	4	0	0	1	3	2	1
$\overline{\overline{\nu\ \rho}}$	8	2	0	3	7	6	1

Wir haben noch hinzuzufügen die Kombinationen von drei doppelten Bedingungen, deren Lösungen aus § 4 teils unmittelbar, teils vermittels der Formeln in (72.) entnommen werden.

	$\overline{\mu}$	$\overline{\rho_1}$	$\overline{\rho_2}$	$\overline{\nu_1}$	$\overline{\nu_2}$
$\overline{\mu^2}$	1	3	3	4	4
$\overline{\mu}\ \overline{\rho_1}$	3	7	7	10	10
$\overline{\rho_1}^2$	7	15	15	22	22
$\overline{\mu}\ \nu_1$	4	10	10	14	14
$\overline{\rho_1}\ \overline{\nu_2}$	10	22	22	32	32
$\overline{\nu_2}^2$	14	32	32	46	46
ν	1	3	3	4	4

e. Nullcorrelationen.

(88.) Die letzte, N überschriebene, Kolonne ist noch unerklärt: Sie gibt die Anzahl der Nullkorrelationen, welche in den durch die symbolischen Produkte der ersten Kolonne bestimmten Korrelations-Systemen enthalten sind.

Für eine Nullkorrelation gibt die Punktkernfläche gar keine Bedingung ab, und 5 Bedingungen werden durch eine endliche Anzahl von Nullkorrelationen befriedigt.

μ gibt durch die Verbindungsgrade der konjugierten Punkte einen Nullstrahl, ρ desgleichen durch die Schnittgrade der konjugierten Ebenen.

$[A_1;a_2] = \mu_1$ gibt einen Punkt und seine Nullebene nämlich A_1 und die Ebene $(A_1\, a_2)$, desgleichen gibt $[\alpha_1\,;\, a_2] = \overline{\rho_1}$ eine Ebene und ihren Nullpunkt, nämlich α_1 und den Punkt $(\alpha_1\, a_2)$. Dasselbe gilt von $\overline{\mu_2}$, $\overline{\rho_2}$, denn die Nullkorrelation ist ja involutorisch.

Für ein ein-, zwei-, dreifaches System von Nullkorrelationen gelten ebenso wie bei einem gleich mannigfaltigen System allgemeiner Korrelationen die Beziehungen: $\nu = 2\mu$, $\nu = \overline{\mu} + \overline{\rho}$, $\overline{\nu'} = 2\overline{\nu}$, welche auch durch dieselben Ueberlegungen erwiesen werden.

(89.) Eine Nullkorrelation ist eindeutig bestimmt[1]) durch 5 Nullstrahlen, oder durch ein Paar auseinanderliegender polarer Strahlen und einen dazu windschiefen Nullstrahl, oder durch ein Paar Nullpunkt und Nullebene und drei Nullstrahlen, oder durch zwei Paar Nullpunkt und Nullebene und einen Nullstrahl[2]) oder endlich durch drei Paare Nullpunkt und Nullebene, wobei aber die Verbindungsebene der drei Punkte durch den Schnittpunkt der drei Ebenen gehen muss. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass die gegebenen Stücke unabhängig von einander sind.

Damit sind sofort die Anzahlen des ersten, zweiten, dritten und fünften Abschnittes der Haupttabelle erhalten.

Eine Bedingung $\overline{\overline{\mu}} = [A_1; \alpha_2]$ kann durch keine Nullkorrelation befriedigt werden.

Die Bedingung $\overline{\overline{\nu_1}} = [a_1; (A_2, \alpha_2)]$ gibt zwei Paare Nullpunkt und Nullebene, die aber einen Nullstrahl gemein haben, nämlich A_2 und Ebene $(A_2 a_1)$, Punkt $(a_1 \alpha_2)$ und Ebene α_2, oder — um unabhängigige Stücke zu haben — ein Paar Pol und Nullebene $(a_1 \alpha_2)$; α_2 und einen Nullstrahl, den ich willkürlich aus dem Strahlenbüschel von A_2 nach a_1 herausgreifen kann. Treten also noch zwei Nullstrahlen oder ein Paar Nullpunkt und Nullebene hinzu, so ist eindeutig eine Nullkorrelation bestimmt. Damit ergeben sich die Anzahlen des vierten Abschnittes der Tabelle.

(90.) Die Tabelle zeigt, dass in jeder Zeile die Summe der mit ψ und N überschriebenen Glieder gleich dem mit μ überschriebenen ist. Diese Erscheinung beruht darauf, dass die Zahl μ der Korrelationen eines einfach unendlichen Systems, welche ein gegebenes Paar konjugierter Punkte befriedigen $A_1; A_2$, wenn ich A_1 mit A_2 zusammenfallen lasse, stetig in die Anzahl der Korrelationen des Systems übergeht, welche alle Punkte des Raumes zu sich selbst konjugierten haben, d. h. der speziellen achsialen Korrelationen und der Nullkorrelationen.

[1]) Reye, Geom. d. L. II, S. 168 ff. Schroeter, Oberfl. 2. Ordn. S. 309 ff.

[2]) das kommt auf ein Paar polarer Graden und einen Nullstrahl heraus.

§ 6. Korrelative Räume mit gemeinsamer Punkt- und Ebenen-Kernfläche F^2 und Φ^2.

(91.) Wir nehmen F^2 und Φ^2 unzerfallen an und lassen sie sich in einem *windschiefen Vierseit* schneiden [1]). Ueber dessen Realität machen wir keine Voraussetzung, wie auch F^2 und Φ^2 selbst imaginär sein können, nur muss es die andre auch sein, wenn es die eine ist, weil sie in Korrelation in einander übergehen sollen.

F^2 repräsentiert 9 einfache Bedingungen, auf ihr gibt es ∞^4 Vierseite, durch jedes gehen ∞^1 Flächen 2ten Grades. F^2 und Φ^2 geben zusammen also nur 14 Bedingungen ab, *sie werden eine einfache Mannigfaltigkeit von Korrelationen festlegen* [2]).

(92.) Das Strahlennetz mit den Vierseitsdiagonalen als Leitgraden ist stets reell, auch wenn die Diagonalen selbst imaginär sind. *Dieses Netz ist den Komplexen* K^1 *und* Γ^1 *aller Korrelationen gemein.* Die Involution konjugierter Punkte und Ebenen auf und um die Strahlen des Netzes wird durch das Polarsystem der F^2 bezw. der Φ^2 bestimmt. Ist $A_1 \equiv A_2'$ ein beliebiger Punkt des Raumes, so hat er auf dem durch ihn gehenden Netzstrahl einen in allen Korrelationen doppelt konjugierten Punkt $A_2 \equiv A_1'$. Durch diesen gehen alle seine Polarebenen in beiderlei Sinne.

In jeder Korrelation geht das durch F^2 und Φ^2 festgelegte Büschel involutorisch in sich selbst über. Ein Paar bilden F^2 und Φ^2, ein weiteres die beiden zerfallenen Flächen des Büschels, bestehend aus je einem Ordnungs-Ebenenpaar und Klassen-Punktpaar, die dem Vierseit als gegenüberliegende Ebenen und Ecken angehören. Diese Involution ist dadurch bestimmt und allen Korrelationen gemein. $A_1 \equiv A_2'$ bestimmt eine Fläche im Büschel, ihr entspricht eine andere in der Involution. Seine Polarebenen müssen

[1]) Ueber die Abhängigkeit der beiden Kernflächen in Gestalt und Lage von einander, so wie über ihren Einfluss auf die Gestalt der Korrelation vgl. Montesano, Sulla corrispondenza reciproca nello spazio, Napoli 1885.

[2]) Die Erkenntnis, dass F^2 und Φ^2 ein einfach unendliches System von Korrelationen festlegen, findet sich Sturm, Math.Ann.26.S.465.Nr.18.

dem Kegel angehören, der von $A_2 \equiv A_1'$ kommend diese Fläche berührt. Also:

In den Korrelationen, welche F^2 *und* Φ^2 *gemein haben, ist der Ort der einem Punkte entsprechenden Ebenen in beiderlei Sinne ein und derselbe Kegel zweiten Grades.*

Eine Tangentialebene dieses Kegels als Polarebene α_2 *von* A_1 *genommen legt die Korrelation eindeutig fest.*

Denn α_2 schneidet die Polarebene α von A_1 bezüglich F^2 in einer Graden durch A_2. Die Strahlen von A_1 nach dieser Graden hin tragen Involutionen konjugierter Punkte. Durch sie und das Strahlennetz ist K^1 festgelegt. Dual ergibt sich, dass Γ^1 bestimmt ist. Die Schnittgrade von α_2 mit jener Ebene α selbst ist ein Wechselstrahl und, da das Haupttetraeder bekannt ist, bestimmt er den ganzen tetraedralen Komplex der Wechselstrahlen W^2. Ist B_1 ein beliebiger Punkt, so muss seine Polarebene β_2 einmal durch den Wechselstrahl gehen, den seine in K^1 ihm zugehörige Ebene in seine Polarebene β bezüglich F^2 einschneidet, und ferner durch den Punkt B_2 auf der Graden $A_1 B_1$, der ihm in der durch die Schnittpunkte mit F^2 als Koinzidenzpunkte, durch A_1 uud den Schnittpunkt mit α_2 als ein Paar konjugierter Punkte festgelegten Projektivität entspricht. β_2 ist so eindeutig bestimmt, also ist auch die ganze Korrelation eindeutig bestimmt.

(93.) Zur Ermittelung des Ortes der einer Graden a_1 in dem System von Korrelationen polaren Graden a_2 lege ich zwei Punkte B_1 und C_1 auf a_1. Ihre polaren Ebenen umhüllen je einen Kegel zweiter Klasse, die Kegel sind projektiv bezogen, wenn ich zwei Ebenen entsprechend sein lasse, die dem B_1 und C_1 in ein und derselben Korrelation zugehören. Ihr Erzeugnis ist eine *Regelfläche vierten Grades, sie ist der Ort der zu* a_1 *polaren Graden.*

(94.) Lege ich in dem Büschel, in welchem K^1 und Γ^1 frei sind, K^1 fest, so erzeugen das Nullsystem von K^1 und das Polarsystem von F^2 durch die Schnittgraden je zweier Ebenen, die zu demselben Punkte in dem einen und anderen System gehören, den tetraedralen Komplex der Wechselstrahlen W^2. Zugleich ist jedem Punkte der Wechselstrahl,

in dem sich seine beiden in Korrelation polaren Ebenen schneiden zugeordnet; er ist die Schnittgrade seiner Polarebenen bezüglich K^1 und F^2. Dieselbe geht durch die Spitze des Kegels, dessen Tangentialebenen die möglichen Polarebenen des Punktes sind. Die Polarebenen des Punktes müssen jetzt die beiden Tangentialebenen durch diesen Strahl sein. *Durch* K^1 *ist darum die Korrelation eindeutig festgelegt*; die Freiheit, welche bleibt, besteht nur in der Benennung der beiden Räume. Dasselbe gilt von Γ^1.

Ich kann sagen: K^1 *und* Γ^1 *durchlaufen ein und dasselbe Büschel von Gewinden projektiv.* Die Projektivität hat zwei Koinzidenzelemente, es gibt also zwei Korrelationen mit identischen K^1 und Γ^1.

(95.) *Was lässt sich aus der Tatsache, dass* K^1 *und* Γ^1 *identisch sind, für die Korrelation schliessen?*

Sei $A_1 \equiv A_2'$ ein beliebiger Punkt, α_2, α_1' seine beiden Polarebenen, die Verbindungsebene mit seinem Wechselstrahl $(\alpha_2\, \alpha_1')$ heisse $\beta_1 \equiv \beta_2'$, deren beide Pole seien B_2, B_1'. Dann ist in $\beta_1 \equiv \beta_2'$ das Strahlenbüschel um $A_1 \equiv A_2'$ das Büschel von K^1, das Strahlenbüschel um den Spurpunkt der Graden $B_1\, B_2'$ das Büschel von Γ^1. Ist nun $K^1 \equiv \Gamma^1$, so fallen diese Punkte zusammen, $A_1 \equiv A_2'$, B_1, B_2' liegen in einer Graden. Dieser Graden entspricht in beiderlei Sinne die gemeinsame Schnittgrade der drei Ebenen α_2, α_1', $\beta_2 \equiv \beta_1'$. Es gibt in jeder Ebene und durch jeden Punkt einen Strahl, dem ein anderer involutorisch polar ist. Die Strahlen dieser Eigenschaft bilden ein Netz, dessen Leitgraden sind entweder sich selbst oder einander involutorisch entsprechend. Im letzten Falle gibt es zwei involutorisch polare Graden, welche Involutionen konjugierter Punkte tragen. Daraus folgt, dass Polar- oder Nullkorrelation herrscht [1]). Im ersten Falle sind die Leitgraden sowohl Strahlen der F^2 als der Φ^2 und die ∞^2 Paare polarer Graden müssen sowohl bezüglich F^2 als auch Φ^2 polar sein. Das ist nur möglich, wenn F^2 und Φ^2 zusammen fallen; hierunter ordnen sich Null- und Polarkorrelation als besondere Fälle.

[1]) Montesano a. a. O. N. VI. 2.

Wir folgern: sind in einer Korrelation K^1 *und* Γ^1 *identisch, so sind auch* F^2 *und* Φ^2 *identisch, es sei denn, dass Null- oder Polarkorrelation herrscht.*

(96.) In unserem Falle bei gegebenen F^2 und Φ^2 sind die Korrelationen mit identischen K^1 und Γ^1 *Nullkorrelationen*, welche F^2 und Φ^2 ineinander überführen. Ich erhalte sie, indem ich einem beliebigen Punkte eine der beiden Ebenen seines zugehörigen Kegels zuordne, welche durch ihn selbst gehen. Die Gewinde, die diesen Nullsystemen zugrunde liegen, sind die Koinzidenzelemente obiger Projektivität (94.).

Zugleich ist der Satz bestetigt: Es gibt zwei Nullkorrelationen, welche zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung mit Vierseitsdurchschnitt in einander überführen.

(97.) In unserem Korrelationssystem kann es keine planaren und keine zentralen Korrelationen geben, weil diese zerfallene Punkt- bezw. Ebenenkernfläche haben. Wohl aber gibt es 4 achsiale Korrelationen: Achsen sind je zwei Gegenseiten des der F^2 und Φ^2 gemeinsamen windschiefen Vierseits, jedes Paar zählt zweifach, weil es frei steht, wie ich es den beiden Räumen zuweise. Die projektiven Punktreihen auf den Achsen erzeugen durch die Verbindungsgraden entsprechender Punkte Φ^2, die projektiven Ebenenbüschel durch die Schnittgraden entsprechender Ebenen F^2.

Setzt man in die Hirstschen Formel von (71.) $\pi = 0$, $\Psi = 0$, $\Psi' = 4$ ein, so ergeben sich, wie es nach (92.) (93.) auch sein muss: $\mu = 2$, $\rho = 2$, $\nu = 4$ [1]).

[1]) Von den ∞^4 achsialen Korrelationen mit zusammengefallenen Achsen, identischen Ebenenbüscheln und identischen Punktreihen geht keine in das System ein, weil in ihnen zwar alle Punkte der F^2 und alle Ebenen der Φ^2 sich selbst konjugiert sind, aber keine F^2 in Φ^2 überführt.

Lebenslauf.

Ich, Wolfgang Vogt, evangelisch, geboren am 21. X. 1883, bin Sohn des Oberlehrers am hiesigen kgl. Friedrichs-Gymnasium Prof. Dr. Heinrich Vogt und seiner Frau Gertrud, geb. Richter. Ich besuchte das kgl. Friedrichs-Gymnasium meiner Vaterstadt Breslau und bestand 1902 zu Ostern die Reifeprüfung. Seitdem widmete ich mich dem väterlichen Studium der Mathematik und Physik und war mit Ausnahme des Sommersemesters 1904, währenddessen ich in Jena vornehmlich an dem dortigen technisch-physikalischen Institut angewandte Mathematik trieb, an der hiesigen Universität immatikuliert.

Meinen verehrten Lehrern, den Herren:

Baumgartner, Franz, Freudenthal, Hintze, Landsberg, London, Lummer, O. E. Meyer, Neumann, Pringsheim, Rosanes, Schäfer, Sturm an der Breslauer, den Herren:

Auerbach, Rau, Thomae, Winkelmann an der Jenenser Universität weiss ich für reiche Förderung aufrichtigen Dank.

Vor allen dankbar bin ich Herrn Geheimrat Prof. Dr. Sturm, dessen Anregung mich auf das Gebiet der synthetischen Geometrie als Arbeitsfeld und besonders auch zu der vorliegenden Arbeit führte.